

スパースモデリングによる変光星の パワースペクトル推定



植村 誠¹
加藤 太一²

〈¹ 広島大学宇宙科学センター 〒739-8526 東広島市鏡山 1-3-1〉

〈² 京都大学大学院理学研究科 宇宙物理学教室 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町〉

¹ e-mail: uemuram@hiroshima-u.ac.jp

変光星の光度曲線がいくつかの周期的な変動の重ね合わせであるとき、それらの周期の推定には光度曲線データをフーリエ変換したパワースペクトルを用いるのが一般的である。このとき問題となるのが観測できなかった・しなかった区間があるためサンプリング間隔が非均一になり、その結果、生じる偽の信号「エイリアス」である。しかし、光度曲線がいくつかの周期変動の重ね合わせであることを仮定してよいなら、パワースペクトルの「スパース性」を用いて、そのようなエイリアスに強い周期推定が可能である。スパースモデリングはさまざまなデータ解析に応用できる重要な概念だが、ここで紹介する例はその最も基本的かつ効果的なものといえる。

1. はじめに

変光星を測光観測して光度曲線のデータを得る。その光度曲線に周期的な変動が見えた場合、もしくは対象天体が周期的な変動をすることをあらかじめ知っている場合、その周期をデータから推定するのは基本的な解析作業である。この時、一般的に使われるのがフーリエ変換であり、パワースペクトルの推定である。

図1は光度曲線とパワースペクトルの例である。上パネルは仮定したパワースペクトルで、ここでは一つの強い信号とその両脇の弱い信号、合計三つの周波数成分を仮定している。このパワースペクトルから生成される光度曲線が中央のパネルの黒線である。しかし、実際の天体観測では青点のように欠損部分が生じることが多い。これは昼夜や天候・季節などの影響で常に同じ時間間隔ではデータが取れないためである。また測定誤差

も加わる。このとき、青点の光度曲線からフーリエ変換で推定されたパワースペクトルが下パネルである。最も強い信号は再構成されているが、両脇の弱い信号よりも本来は存在しなかった偽の信号の方が強く現れている。真の信号を知らなければ、偽の信号を本物とみなしかねない。このような偽の信号は「エイリアス」と呼ばれる。

このようなエイリアスはなぜ現れるのだろうか。そして、この邪魔なエイリアスを避けて、より良いパワースペクトルを得ることはできるのだろうか。本稿では「スパースモデリング」の考え方をういた、この問題に対する新しい手法を紹介する。その効果を手取り早く知りたい方は図1と比較して、図5を先にご覧いただくと良いだろう。本稿で紹介する周期解析の手法は変光星の光度曲線を具体的な対象としているが、例えば視線速度変化などの別種の時系列データに対しても有効だろう。本稿の構成は以下のようになってい

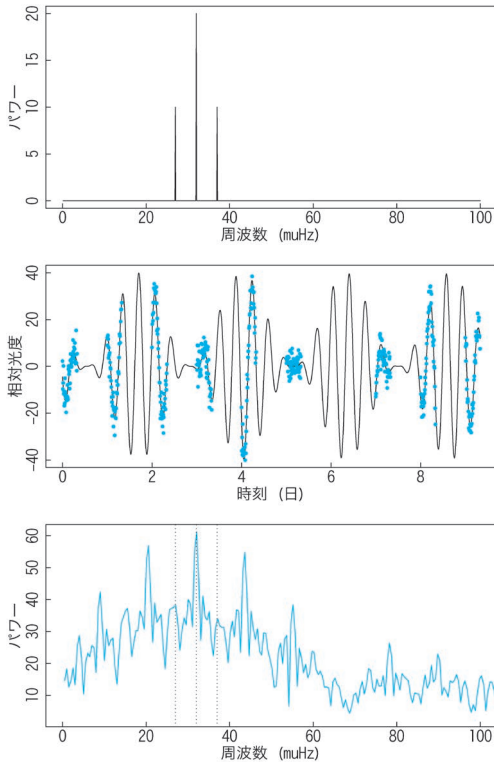


図1 光度曲線とパワースペクトルの例。上: 真のパワースペクトル, 中: 光度曲線, 下: 推定されたパワースペクトル。黒で示されている理想的なデータからは正しいパワースペクトルが推定されるが, 青点で示される欠損部分のある誤差付きのデータではパワースペクトルに偽の信号が見られる。

る。次の2章ではフーリエ変換とエイリアスの基本事項を復習する。フーリエ変換について十分理解している方は2章は読み飛ばすことをお勧めする。3章ではスパースモデリングによる周期解析法を紹介する。4章ではその応用として2次元パワースペクトルの有用性について述べる。5章で本稿の内容をまとめる。

2. フーリエ変換によるパワースペクトル推定

2.1 フーリエ変換の復習

等間隔の時系列データ $y_i(t_i)$ ($i=1 \cdots N$, $t_{i+1}-t_i=$

$\Delta t = \text{一定}$) と, 周波数の関数であるパワースペクトル $P_j(v_j)$ ($j=1 \cdots M$) を考える。フーリエ変換は複素表記で書かれることが多いが, ここでは離散的なフーリエ級数を \sin と \cos の畳み込みとして以下のように表現する。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1 v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_N v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi t_1 v_M) & \cdots & \cos(2\pi t_N v_M) \\ \sin(2\pi t_1 v_1) & \cdots & \sin(2\pi t_N v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sin(2\pi t_1 v_M) & \cdots & \sin(2\pi t_N v_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで a_j, b_j はそれぞれ \cos, \sin の係数であり, ある周波数 v_j のパワーは $P_j(v_j) = a_j^2 + b_j^2$ と計算される。 a_j, b_j はパワーの他に各周波数成分の波の位相の情報ももっている。式(1)はベクトルと行列を用いて

$$\beta = \mathcal{F}y \quad (2)$$

と書ける。ここで

$$\beta = \{a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M\} \quad (3)$$

である。式(1)はつまり, 周波数 v_j のパワーはデータ $y_i(t_i)$ を用いて,

$$P_j(v_j) = \left\{ \sum_i y_i \cos(2\pi t_i v_j) \right\}^2 + \left\{ \sum_i y_i \sin(2\pi t_i v_j) \right\}^2 \quad (4)$$

で計算できることを意味している。

同様に逆フーリエ変換は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1 \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_1 \nu_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi t_N \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_N \nu_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (5)$$

実際の観測データ \mathbf{y}_{obs} には測定誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が加わる:

$$\mathbf{y}_{\text{obs}} = \mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

\mathbf{y}_{obs} から $\boldsymbol{\beta}$ を推定したいとき、式(6)が順問題の形式となる。誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が正規分布であり、その分散が全ての \mathbf{y}_{obs} で等しく、かつ $N > 2M$ 、つまり推定したいパラメータの数よりもデータの数の多い場合は、例えば最小2乗法で $\boldsymbol{\beta}$ が推定できる。推定解 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\beta}\|_2^{*1} \quad (7)$$

と書ける。ここで $\|\mathbf{x}\|_p$ はベクトル \mathbf{x} の p 次ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (8)$$

である。

推定できるパワースペクトルの周波数には $\nu_{\text{Nyq}} = 1/2\Delta t$ で与えられるナイキスト周波数という特徴的な周波数が存在する。パワースペクトルはこの ν_{Nyq} を挟んで「折り返し」が生じる。詳しい説明は省略するが、仮に真の信号が ν_{Nyq} よりも高い周波数領域に存在した場合、この折り返しの効果によって偽の信号が ν_{Nyq} 以下に現れる。真の信号の周波数があらかじめ見積もり可能な場合は、 ν_{Nyq} がその周波数よりも高くなるように観測の Δt

を設計すべきである。

$N=2M$ のとき、つまり式(1)、(5)において連立一次方程式の式の数と変数の数が等しいとき、時間領域の情報 \mathbf{y} から ν_{Nyq} 以下の周波数領域の情報 $\boldsymbol{\beta}$ が完全に再構成され、逆もまた成立する。これがいわゆる「サンプリング定理」である。「完全再構成」は測定誤差によって生じるノイズも含まれる。つまり、無視できない測定誤差を有するデータから再構成されたパワースペクトルには、本来信号がない周波数でも有限のパワーが生じる。図1下の高周波数側でもパワーが0になっていないのはそのためである。測定誤差が各測定間に相関がない場合は周波数に依存しないノイズとしてパワースペクトルに現れるので白色雑音と呼ばれる。当然、そのようにして再構成されたパワースペクトルを逆フーリエ変換するとノイズまで再構成された光度曲線になる。

ここまでは教科書的なフーリエ変換の概要である。フーリエ変換を使う場面は多岐にわたるが、多くは測定作業の自由度が高く、ここで紹介したような等間隔の時系列データ ($\Delta t = \text{一定}$) を扱う枠組みで問題はない。しかし、本稿で扱うような天文学の変光星の観測では Δt が一定でないことが多い。次節でこのときに起こる問題を説明する。

2.2 欠損データに起因するエイリアスの問題

図1中の青点のように、一部の時刻でしか観測できなかったため、光度曲線に欠損ができたでしょう。観測できた時刻の集合を T_{obs} とする。その場合でも式(4)を使えば、観測データ $\{t_i, y_i\}$ ($t_i \in T_{\text{obs}}$) からパワースペクトルを計算することはできそう。しかし、フーリエ変換の式(1)、逆フーリエ変換の式(5)、およびサンプリング定理から考えると、欠損のあるデータから式(4)でパワースペクトルを計算することは、少ない光度曲線の情報からより多いパワースペクトルの情報を推定できるようにも見える。

*1 $\arg \min$ は最小点集合 (argument of the minimum) の省略形で、 $\arg \min_{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{\beta})$ は $f(\boldsymbol{\beta})$ を最小にする $\boldsymbol{\beta}$ の集合を表す。

欠損のあるデータから式(4)でパワースペクトルを計算するという事は、欠損データ部分 $t_i \notin T_{\text{obs}}$ については式(4)内で「足し合わせない」ことを意味する。これは欠損部分は $y_i=0$ とすることと同じである。つまり、逆フーリエ変換の式(5)を使って模式的に書くと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1 v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_1 v_M) \\ \cos(2\pi t_2 v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_2 v_M) \\ \cos(2\pi t_3 v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_3 v_M) \\ \cos(2\pi t_4 v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_4 v_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi t_N v_1) & \cdots & \cos(2\pi t_N v_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \quad (9)$$

左辺の光度曲線データにおいて欠損部分の情報がないため、とりあえず0で埋めることによって $N=2M$ の状況にして、問題を解けるようにする。

しかし、これでは観測していない期間は天体の明るさが0であることを仮定しているのと同じである。図1中の青点で示されている観測データで同じ操作をすると、光度曲線は図2のようになる。観測中は0ではないある明るさで時間変動していた天体が、観測しなくなると突然明るさが0で一定値になる。これは自然な仮定とは到底いえず、実際、黒線で描かれている真の光度曲線とは全く異なる挙動になる。苦労して得たデータを偽のデータ点で汚してしまい、その汚れたデータでパワースペクトルを推定するため、パワースペクトルもエイリアスで汚れるのは当然である。

より正確には、データがある時刻を1、欠損期間を0とする窓関数 $w(t)$ を定義し、観測されるデータは完全なデータ $y(t)$ に対して $y_{\text{obs}}=wy$ で得られると

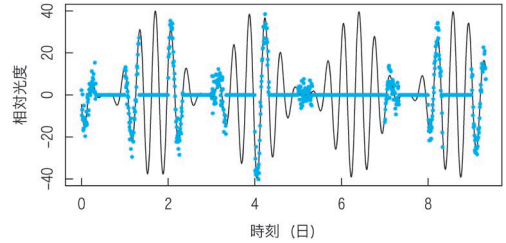


図2 不完全なデータをフーリエ変換するときの処理。欠損部分を計算に含めないことは欠損期間の光度を0と扱うことに等しい。

考える。このとき、フーリエ変換の結果は $\mathcal{F}(wy) = \mathcal{F}w * \mathcal{F}y$ となることが知られている。ここで演算子 $*$ は畳み込みを表す。つまり、欠損のあるデータから得られるパワースペクトルは真のパワースペクトルに窓関数のパワースペクトルが畳み込まれたものになり、そのためエイリアスが現れる。

欠損データがある場合、逆フーリエ変換の式(5)は $N < 2M$ の状況になって解が一意に決まらない。そのためこの状況でのパワースペクトル推定は原理的に何かしらの仮定や、解に対する制約を課す必要がある。しかし、図2のような操作はあまりにも不自然である。代わりに例えば「ほとんどの周波数でパワーは0である」という仮定の方がまだ「マシ」な仮定ではないだろうか。式(7)において、最小2乗法だけからは一つに決まらない β だが、その要素のうち0ではない(非ゼロ)要素が最も少ない解を選ぶのはどうだろう。要素の多くが0であるベクトルは「スパースなベクトル」と呼ばれ、本シリーズで池田、森井の記事でも紹介されたように、このスパース性をうまく利用する「スパースモデリング」は近年、統計学・情報科学の分野を中心に注目されている¹⁾。次章からは本問題へのスパースモデリングの応用を紹介する。

3. スパースモデリングによるパワースペクトル推定

3.1 LASSO

式(7)において、データが足りずに解が一意に

決まらない時に、推定したい $2M$ 次元ベクトル β がスパースだと仮定して、その非ゼロ要素の数が最も少ない解を選択したい。そのために池田、森井の記事でも紹介されているスパースモデリングの一種、「Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)」を用いる^{1),2)}。パワースペクトル推定を LASSO の問題とすると、それは式(7)に罰則項を加える形で以下のように書ける。

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \|y_{\text{obs}} - \mathcal{F}^{-1}\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1 \quad (10)$$

罰則項 $\|\beta\|_1$ はベクトル β の 1 次ノルムであり、式(8)より、要素の絶対値の和 $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum |x_i|$ である。

1 次ノルム項も含めた評価関数を最小化することにはモデルの「過学習」を防ぐ効果がある。「過学習」とは、データに対して多過ぎる変数を用いることで、モデルの予測性能が低くなってしまふ現象である。パワースペクトル推定の場合、 $N=2M$ の状況ではサンプリング定理によってデータの測定誤差 (= 白色雑音) まで完全に再現するパワースペクトルがフーリエ変換で得られる。このパワースペクトルは得られたデータに対しては高い精度を持つが、本来独立な白色雑音まで再現してしまうことによって、新しいデータに対する予測の精度は低くなる。これが過学習である。罰則項 $\|\beta\|_1$ を加えることで β の不要な要素を 0 にし、白色雑音まで再現しない、より真に近いパワースペクトルが推定できる。

1 次ノルム最小化によってスパースな解が得られることを模式的に示したのが図3である。ここでは連立 1 次方程式において、変数が二つ、方程式が一つある場合を考えている。黒線が方程式によって与えられる解の集合を表している。1 次ノルム一定の線は青線のような菱形になる。1 次ノルム最小解とは、黒線と交わる最小の青菱形を考慮することであり、その交わる点は 2 つある変数の片方が 0 に、つまりスパースな解になる。実際のデータでは測定誤差が無視できないため、図3の直線は尤度関数に相当する等高線をイメージすると良い。

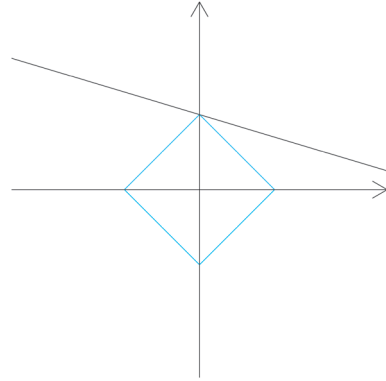


図3 1 次ノルム最小化の模式図。連立 1 次方程式で変数が二つ、式が一つしかない場合を考える。黒線が方程式の解、青線が 1 次ノルムが一定となる関係を表している。1 次ノルムが最小となる方程式の解は変数の一つが 0 となるスパースな解になっている。

この手法は従来から使われている「CLEAN アルゴリズム」と関連している³⁾。CLEAN ではまず式(4)によってパワースペクトルを作り、そこに現れる強い信号に窓関数のパワースペクトルを当てはめ、差し引くことで窓関数の畳み込み効果を補正する。どの信号から窓関数成分を差し引くかは解析者が決めることが多い。LASSO によるパワースペクトル推定はいわば自動 CLEAN ともいえるが、式(4)によって偽信号を含んだパワースペクトルをいったん作る、という余計な操作をせずに解を推定するのが特徴である。

式(10)は β の 1 次ノルムを罰則項にしているが、 β の中には式(1)からわかるように、 \cos の係数 a と \sin の係数 b が混ざっている。この問題で仮定すべきはパワースペクトルのスパース性なので、ある周波数 ν_i のパワーがゼロ、もしくは非ゼロになるとときには、 a_i, b_i がそろってゼロ、もしくは非ゼロになる制約を課すべきである。これはグループ LASSO と呼ばれる手法で可能となり、以下のようなになる。

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \|y_{\text{obs}} - \mathcal{F}^{-1}\beta\|_2^2 + \lambda \sum_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (11)$$

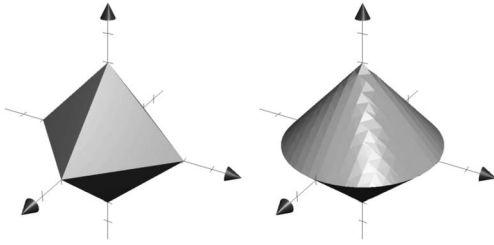


図4 LASSO (左) とグループLASSO (右) の等ノルム面の模式図. 3次元の場合. LASSOでは三つの変数が独立に扱われているが, グループLASSOでは三つのうち二つの変数がグループ化されている.

同じ周波数の係数は2乗和をとり, その平方根の和を取ることによって1次の量になっている. LASSOとグループLASSOの等ノルム面の形状の違いを模式的に図4に示す. この図では三つの変数を考えている. LASSO (左) の場合は図3を3次元にしたもので, 等ノルム面は正八面体になっている. 図3と同様, データからの制約が平面で与えられれば, 1次ノルム最小解がスパースになることが想像できる. 一方, グループLASSO (右) では三つのうち二つの変数がグループ化されており, その断面は2次なので「円」になっている. この場合, グループ化されている要素が非ゼロの場合は, グループ内の二つの変数は互いに非ゼロの値をもつ. パワースペクトル推定の問題においては, 式(11)のグループLASSOのほうが弱い信号でも検出しやすい傾向がこれまでのわれわれの研究で見られているが, 多くの場面で両者に大きな性能差は見られていない⁴⁾.

式(10), (11)には定数 λ が含まれている. λ が大きいと解のスパース性が高くなる, つまり, 使用される変数が少ない単純なモデルになる. 逆に λ が小さいと変数の数が多くなり, 過学習が起きる. λ の値によってモデルが決まるとも言えるため, その値を決めることは重要である. 本稿では詳しくは省略するが, λ の推定は「モデル選択」と呼ばれる分野で盛んに研究されており, データから客観的に推定することができる. 加藤, 植村

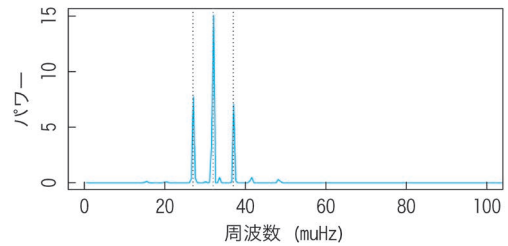
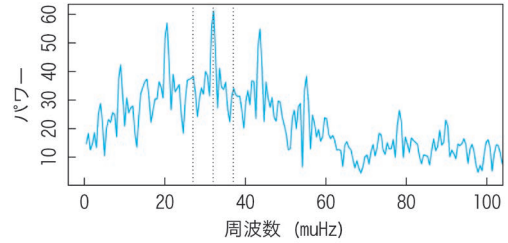


図5 人工データを用いたLASSOによるパワースペクトル推定の例. 上: 通常のフーリエ変換によるパワースペクトル. 下: LASSOで推定されたパワースペクトル. データは図1と同じもの. パワーの単位は任意のもの. 縦の点線が仮定した真の信号の周波数を表している.

(2012)では統計解析に特化したスクリプト言語Rでの, LASSOによるパワースペクトル推定, および, 交差検証法による λ の推定のサンプルスクリプトが掲載されている⁵⁾.

3.2 LASSOによるパワースペクトル推定の例

図1と同じデータを用いて式(11)のグループLASSOでパワースペクトルを推定した結果を図5に示す. 上が通常のフーリエ変換で得られたもので, 図1のものと同じである. 下が同じデータを使ったLASSO推定の結果である. LASSO推定されたパワースペクトルでは非等間隔なサンプリングが原因で生じていた強いエイリアスが消え, 白色雑音もほぼなくなっている. いくつかの弱い偽信号も見られるが, 通常のフーリエ変換と比べてその差は一目瞭然である.

図6は実データを用いた例である. 天体は非動径脈動をすることで知られているたて座デルタ型変光星を含んだ食連星KIC 10661783で, データはケプラー衛星によって取られたものである⁶⁾.

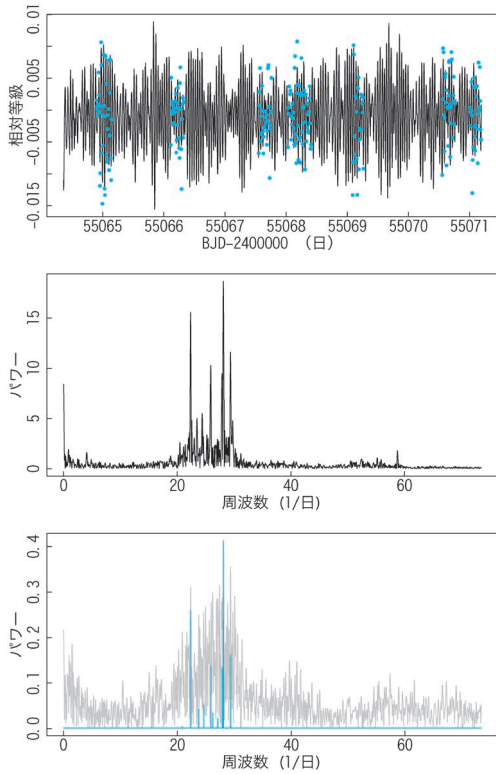


図6 上: ケプラー衛星による KIC 10661783 の光度曲線(黒線)⁶⁾と, 地上観測を模したデータ(青点). 中: 完全なデータから得られるパワースペクトル. 下: 不完全なデータから LASSO 推定で得られるパワースペクトル(青色)と, 通常のフーリエ変換で得られるパワースペクトル(灰色).

上のパネルでは約1分の時間間隔で等間隔に得られた約7日分、10,000点の光度曲線を黒線で示している。食の部分はあらかじめ補正されており、たて座デルタ型の変動が卓越している。この光度曲線をフーリエ変換して得られたパワースペクトルが中央のパネルである。周波数20-30日⁻¹に信号が集中していることがわかる。

このデータから地上観測を模してデータを間引いたものが上パネルに青点で示されている。データはまず10点に1点、定期的にサンプリングし、10,000点を1,000点に減らす。次に、地上の異なる経度の2カ所の観測所でそれぞれ夜間に観測す

る設定で、さらにデータを間引く。悪天候によるデータ欠損も課している。これによって、観測点は最終的に10,000点から242点に減っている。また、標準偏差0.003の正規乱数を等級データに加えた。この青点のデータをフーリエ変換すると、下パネルの灰色のパワースペクトルになる。多数のエイリアスと白色雑音を確認でき、中央のパネルで検出できる信号は同定が難しい。

同じデータをLASSOでパワースペクトル推定すると、下パネルの青色のパワースペクトルになる。ノイズを加えたため、パワーの小さい信号は検出されていないが、周波数20-30日⁻¹の帯域にあるパワーの比較的大きな信号は正しく検出されている。パワーの小さな信号を検出したいときはデータの測定誤差を小さくする必要があるが、パワーが大きければエイリアスの問題はLASSO推定によって軽減され、地上観測でも人工衛星観測にかなり近い結果が得られる可能性がある。

4. 2次元LASSOパワースペクトル

通常のフーリエ変換によるパワースペクトル推定では、本来はパワースペクトル上でデルタ関数的な信号であっても観測期間に依存して幅を持った信号として現れる。これは、窓関数が有限区間になるため、そのパワースペクトルも0でない有限の幅をもち、それが真のパワースペクトルに畳み込まれるためである。一方、LASSOで推定したパワースペクトルは信号の幅が狭くなる。この特性を活かした応用として2次元LASSOパワースペクトルを用いた例を紹介する。

図7はケプラー衛星が観測した矮新星V1504 Cygの約1年間の光度曲線(上パネル)とLASSOで推定した短時間振動の2次元パワースペクトルの結果(下パネル)を示している⁷⁾。この天体は10日程度の周期でアウトバーストを、100日程度の周期で規模の大きなスーパーアウトバーストを起こす。白色矮星とM型矮星からなる連星の軌道周期は約100分であり、この周期の付近で短時

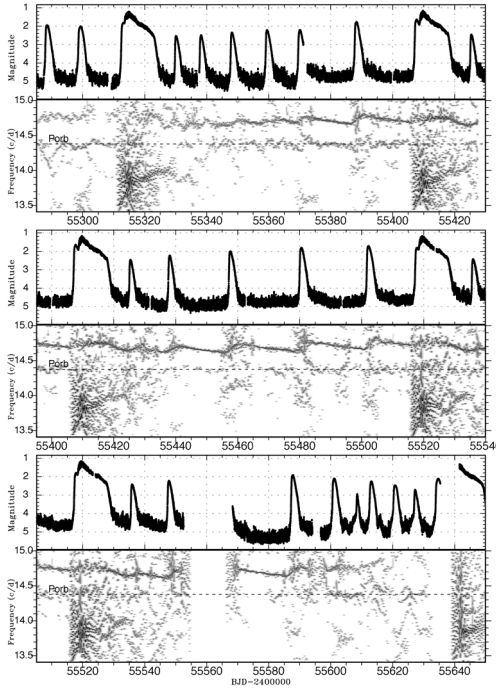


図7 2次元LASSOパワースペクトルの例⁷⁾.

間振動が観測される．この短時間振動の推移を調べるために5日間ごとのパワースペクトルを計算し、周波数を縦軸に、パワーの大きさをグレースケールで表したものが2次元パワースペクトルである．このような図から、変動成分が時間と共どのように生成・消失するのか、またはその周期の変化を知ることができる．

この例では3種類の周波数成分が現れている．横点線で示されているのは連星の公転軌道周期であり、静穏期に目立っている．矮新星は白色矮星を含む半分離型連星系で、降着円盤からの放射が卓越する．軌道周期の変動は伴星の軌道運動に付随した変動である．二つ目の周波数成分は、横点線で表されている軌道周期よりも低い周波数帯に、特に規模の大きなスーパーアウトバースト時に現れている．これは離心楕円状に変化した降着円盤の歳差運動に起因する、いわゆる「スーパーハンプ」と呼ばれる変動である．そして三つ目の周波数成分は軌道周期より高い周波数帯に現れ、

アウトバーストごとに周期を変えながら、スーパーアウトバーストが近づくにつれて周波数が最も高くなる．この変動は「ネガティブスーパーハンプ」と呼ばれ、その変動周期は降着円盤の半径に相当する．そのため、図7の結果は降着円盤の時間発展を直接調べることを可能にし、円盤不安定性理論を裏づける証拠となった．

図7では一つのパワースペクトルを計算する際のデータの期間は5日間しかないため、通常のフーリエ変換では信号が幅広くなってしまい、三つの周波数成分の分離やそれらの周期変化は見えにくくなる．特にネガティブスーパーハンプの周期変化が明確に見えるのはLASSOの恩恵といえる．

5. 最後に

本稿ではパワースペクトルのスパース性を利用した変光星の周期解析法について紹介した．この手法はデータから決まる最小2乗項(式(10)右辺の第一項)にパワースペクトルのスパース性を仮定する罰則項を加えて全体を評価している．この罰則項はベイズモデルにおける事前分布にあたる．このようにデータのみを虚心坦懐に扱うのではなく、事前にわかっている(と思っている)仮定を導入することに対して、心理的に抵抗があるかもしれない．しかし、ここで強調したいことは、2章で述べたように、非等間隔なサンプリングによって理想的なデータが得られない以上、パワースペクトル推定の問題は何かしらの仮定・制約なしには原理的には解けないということである．式(4)でパワースペクトルを作ることには不自然な仮定をしてデータを汚していることに相当し、それよりはパワースペクトルのスパース性を仮定するほうがより良い選択となる場面があることは間違いない．

では、スパースモデリングによる手法はあらゆるパワースペクトル推定の場面で最も良い選択かということ、そうではない．この手法は光度曲線が複数の周期の重ね合わせであることは既知だが、

それら周期と、その数は不明で、しかもエイリアスが邪魔になる場面で非常に有効である。一方、パワースペクトルがべき型で、そのべき指数を推定したい場面では適当でないし、等間隔で十分なデータがある場合もご利益は少ない。光度曲線に見えている波形の周期一つを決めさえすれば良い場面では、非等間隔なデータでも通常のフーリエ変換で十分である。ノイズが大きい光度曲線に一つの周期性があるかないかを知りたい問題はパワースペクトルの推定法よりもむしろ統計的検定やモデル選択の問題といえる。このように、問題によって適切な手法を選ぶことが重要である。

本稿で扱った問題は天文学のデータ解析全般の中で直接の応用先が限られているが、一方で、スパース性の活用、モデルの予測性能、過学習、罰則付き最小2乗法など、最近注目されるベイズ統計、機械学習、人工知能といった手法の基本となる概念を理解するための良い題材ともいえる。スパースモデリングのさらに広い応用例としては、本シリーズで予定されている電波干渉計の話題のほかにも、植村のWEBサイトに「天文屋のためのHOW TOスパースモデリング」として資料を公開してあるので、興味を持たれた方はご覧頂きたい⁸⁾。スパースモデリングの統計学的な理論面に興味のある方は統計学・情報科学の専門書として、マイケル・エラド著・玉木徹訳「スパースモデリング: l_1/l_0 ノルム最小化の基礎理論と画像処理への応用」⁹⁾ や、永原正章著「スパースモデリング—基礎から動的システムへの応用」¹⁰⁾ が参考になるだろう。両書とも後半は各分野の応用例が紹介されているが、前半は共通して理論的な基本事項がまとめられている。

謝 辞

本研究は科学研究費補助金(25120007)によるサポートを受けて行われた。KIC 10661783のケプラー衛星のデータはJ. Southworth氏からご提供いただいた。原稿に対する建設的なコメントを

いただいた担当編集委員の岡部氏に感謝する。

参考文献

- 1) 池田思朗, 森井幹雄, 2018, 天文月報, 111, 460
- 2) Tibshirani, R., 1996, J. of the Royal Stat. Soc. Series B 58, 267
- 3) Roberts, D. H., Lehar J., & Dreher, J. W., 1987, AJ, 93, 968
- 4) 植村誠, 2013, 平成25年度連星系・変光星・低温度星研究会 集録, 81
- 5) Kato, T., & Uemura, M., 2012, PASJ, 64, 122
- 6) Southworth, J., et al., 2011, MNRAS, 414, 2413
- 7) Osaki, Y., & Kato, T., 2013, PASJ, 65, 95
- 8) http://home.hiroshima-u.ac.jp/uemuram/?page_id=234 (2018.3.27)
- 9) マイケル・エラド (玉木徹訳), 2016, スパースモデリング: l_1/l_0 ノルム最小化の基礎理論と画像処理への応用 (共立出版)
- 10) 永原正章, 2017, スパースモデリング—基礎から動的システムへの応用 (コロナ社)

Power Spectrum Estimations of Variable Stars Using Sparse Modeling

Makoto UEMURA¹, Taichi KATO²

¹ Hiroshima Astrophysical Science Center, Hiroshima University, Kagamiyama 1-3-1 Higashi-Hiroshima 739-8526, Japan

² Department of Astronomy, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Abstract: The power spectrum estimation is a fundamental tool to study variable stars when the light curves are periodic. This method has a common problem that the false signals, so-called “aliases” appear in the estimated power spectra for the data whose sampling interval is not uniform. However, this problem can be overcome by using “sparsity” of the power spectrum when the light curves can be assumed to be periodic. Sparse modeling is a concept which is applicable to a wide range of data analysis in astronomy. Here, we introduce a new method of the power spectrum estimation, which is one of the most basic and effective applications of the sparse modeling to the astronomical data analysis.