

# 相対論的な3体系におけるヒル安定性問題

鈴木 遼

〈早稲田大学先進理工学研究科物理学及应用物理学専攻 〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1〉

e-mail: suzuki@heap.phys.waseda.ac.jp



構成天体が3つ以上の系（多体系）では、天体の運動は重力相互作用により複雑な時間発展を示す。多体系での天体の運動は古くからニュートン力学を用いて議論されており、特殊解や軌道共鳴現象、安定性問題等、幅広い研究がなされてきた。しかし、ニュートン力学で解析されてきた天体力学的現象が、ブラックホール等の強い重力場をもつ相対論的な多体系においても全く同じように起きるとは限らない。そのような系の解析のため、これまでニュートン力学でなされてきた議論を相対論的なものに拡張する必要がある。本稿では特に「ヒル安定性問題」と呼ばれる問題を取り上げ、特に3体系における十分条件の導出について、ニュートン力学での先行研究を紹介するとともに、相対論的な拡張を議論する。

## 1. 天体力学と一般相対性理論

天体力学は天体の運動を数理的に記述する学問である。その歴史は古く、始まりは16世紀のケプラーの法則の発見にまで遡る。膨大な惑星観測データから見いだされたケプラーの法則は、17世紀にはニュートンが構築した力学体系（ニュートン力学）によって完全に説明された。ニュートン力学では、天体の運動は運動方程式を用いて記述できる。天体の変形を無視して質点として扱うと、重力のみで束縛された2つの天体の相対運動においては運動方程式の一般解が求められ、運動は楕円・放物線・双曲線軌道のいずれかに分類できる。しかし、構成天体が3つ以上の系（多体系）では、運動方程式の一般解を得ることはできず、天体の運動はそれぞれの重力相互作用により複雑に時間変化するようになり、時には楕円等で近似できないカオス的な軌道をも描くようになる。このような複雑な運動をどうやって解析するかとい

う問題は多体問題と呼ばれる。18世紀頃から解析力学を用いて議論されるようになり、特殊解の存在や軌道共鳴<sup>\*1</sup>等様々な現象が発見されてきたほか、系の安定性についても盛んに議論が行われてきた。現在ではコンピュータでのシミュレーションを用いて多体系の運動を直接計算できるようになり、ニュートン力学における多体問題のさらなる理解が進んできている。

20世紀になると、アインシュタインによって一般相対性理論（相対論）が提唱され、ニュートン力学は重力が弱い場合における極限にすぎないという驚くべき事実が判明した。相対論の効果は天体の軌道運動にも現れる。例えば、水星軌道の近点<sup>\*2</sup>が徐々に回転移動している様子が観測されているが、この近点移動という現象は相対論を用いて説明することができる。相対論の登場により、ニュートン力学で研究されてきた天体力学的現象の一部は相対論的な補正を考慮して議論されるようになった。しかし、これまで多体問題とし

\*1 多体相互作用により軌道の形が大きく変化する現象。

\*2 楕円軌道において、中心天体と公転する天体の距離が最も近くなる場所を近点と呼ぶ。

て主に想定されてきた惑星系や惑星形成過程では、微小な近点移動を除いてニュートン力学による近似が基本的によく成り立つため、すべての議論が相対論的に拡張されたわけではなかった。特に多体系の安定性解析においては相対論を用いての議論がまだまだ十分になされていない。

相対論を真面目に考える必要があるような多体系など実在するのかと疑問に思われる方もいらっしゃるかもしれない。多体系において相対論の効果が重要になるのは、ブラックホールや中性子星などの重くて小さな天体が至近距離に3つ以上集まっているような場合であり、惑星系に代表されるニュートン力学的な系ほど普遍的に存在するとは確かに考えにくい。しかし、相対論的な多体系は妄想の産物ではなく、実際に観測された事例が存在する。2014年に観測されたPSRJ0337+1715系と呼ばれる3体系である[1]。この系は中性子星と白色矮星2つから成る非常にコンパクトな3体系で、その軌道には水星軌道以上に相対論的効果が顕著に現れている[2, 3]。このような系は今後も発見されていくと予想されており、重力波[4-7]や電波[8-10]、可視光[11, 12]などを用いての観測可能性が盛んに議論されている。

このような状況下で、ニュートン力学で記述された従来の天体力学的現象を相対論的な議論に拡張しておくことは非常に重要である。本稿では、特に「ヒル安定性問題」と呼ばれる安定性問題に着目し、ニュートン力学での先行研究を紹介したうえで相対論的な拡張について議論していく。

## 2. ヒル安定性問題

多体系の「安定性」とは何か？ そもそも、どのような状態になったら多体系が「不安定」になったといえるのか？ まず、系の安定・不安定を定義しなければならない。天体が他の天体と衝突したら不安定、系外に放り出されたら不安定、カオス的な挙動を見せたら不安定等、様々な定義があり、それぞれの定義に対して多くの研究がなされてきた。本稿では、数ある安定性問題の中からヒル安定性問題と呼ばれるものに着目する。

ヒル安定性問題では、系の安定性は「2つの軌道が近付きすぎないこと」として定義される。通常、2つの軌道が極めて接近すると\*<sup>3</sup>、公転している天体間の重力相互作用によって天体同士の衝突やスイングバイによる系からの離脱、カオス的な運動等が誘発される。得られる結果は様々であるものの、多体系の運動において不安定と称される結果が得られることが多いため、トリガーとなる軌道同士の接近が生じてしまったら「系が不安定になった」と判断するのである(図1)。

ヒル安定性の研究は、ヒルによって1878年に出版された、衛星の運動に関する研究に端を発する。ニュートン力学において、初めヒル安定性問題は質量のある天体の周りを質量をもたないテスト粒子が2つ円軌道で運動している系の安定性問題として議論された[13-15]。このような系において、テスト粒子の運動はヤコビ積分という保存量を用いて分類された。さらに、もし2つのテスト粒子の軌道が初期に十分に離れているならば、2つの粒子の間に双方が侵入できない「運動禁止

\*<sup>3</sup> 何をもって軌道が極端に接近したとするかという距離的な指標には、「ヒル半径」という距離がよく用いられる。重い天体の周りを1つの天体が公転しているような状況を想定し、さらに質量をもたないテスト粒子を3体目として追加することを考えると、ポテンシャルの等高線を描くことでテスト粒子の配置に対するその後の軌道を分類することができる。例えば、2つの天体の双方から十分に遠いところに置かれたテスト粒子は2つの天体のさらに外側を回る軌道を描くが、片方の天体に十分に近い場所に置かれたテスト粒子は、地球に対する月のようにその天体の周囲を回る。後者の運動を得られる領域は天体を中心とする球で近似でき、その球の半径をヒル半径と呼ぶ。ヒル半径は、1つの天体の重力が及ぶ範囲を表す指標として用いられる。

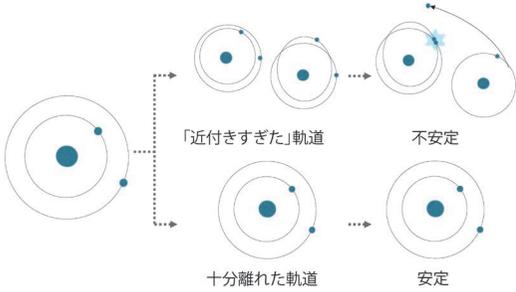


図1 ヒル安定性問題の概略図.

領域」が存在し、粒子同士は接近しすぎず、系はヒル安定であるということが示された。その後、ヒル安定性問題の研究対象は徐々に一般の3体系へと拡張されていき、ついに一般の3体系におけるヒル安定性の十分条件が導出されることとなった。一般の3体系におけるヒル安定性の十分条件については、次章にて詳細に説明する。

1992年に太陽系外惑星が初めて観測された後[16]、系外惑星系や惑星形成過程における軌道安定性の解析にヒル安定性問題の議論が利用されるようになってきた。1996年には、4体以上の系のヒル安定性問題がシミュレーションを用いて調べられた[17]。驚くべきことに、4体以上の系のヒル安定性には3体系と同様の十分条件は適用できず、初期の軌道間距離が離れていても十分な時間が経過すれば系は不安定になるという結果が得られた。なぜこのような結果が得られるのかについては、ニュートン力学の範囲でもいまだ議論が続いており、近年ではカオス理論を用いての説明が有力視されている[18]。

このように、ニュートン力学の範囲ではヒル安定性は様々な観点から研究されてきている。しかし、相対論的に拡張した研究はこれまでほとんどなされていない。唯一の例外は1991年のGe & Alexanderによる研究[19]である。相対論では重力は4次元時空の形状として記述されるが、彼らは時空の形状をシュワルツシルト時空と呼ばれるものに限定して相対論的なヒル安定性を議論した。しかし、一般の多体系では時空がシュワルツ

シルト時空からかけ離れていることも多々あると考えられ、彼らの研究を一般的な多体系へと応用することは難しい。そこで、筆者らの研究ではより一般の系へ応用しやすい形を目指し、「ポストニュートン近似」という近似により、ニュートン力学に対する補正項という形で相対論的な効果を考慮することにした[20]。

上述したように、ニュートン力学の範囲ではヒル安定性は様々な多体系を対象に理論的・数值的に研究されてきており、それぞれの研究を相対論的に拡張することで新たな発見が多々得られるのではと期待される。今回は特に3体系に着目し、相対論的なヒル安定性の十分条件について、理論と数値計算の両面から議論していく。

### 3. 3体系における十分条件

#### 3.1 ニュートン力学での先行研究

前章で紹介したように、ニュートン力学における3体系のヒル安定性は、初めテスト粒子を含む特殊な系に対して議論され、その後徐々に対象を一般の系へと拡張していった。テスト粒子を含む系ではヤコビ積分と呼ばれる1つの保存量だけで運動を分類することができていたが、一般の系を対象とする議論では、系の全ハミルトニアンと全角運動量という2種類の保存量が用いられる。

鍵を握るのは、サンドマン不等式と呼ばれる以下に示す恒等不等式である[19, 21]。

$$\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\left(\sum_j m_j v_j^2\right) \geq \left|\sum_j m_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right|^2 + \left|\sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{v}_j\right|^2 \quad (1)$$

この不等式は任意のベクトルに対して成り立つ不等式である。すなわち、式中のベクトル $\mathbf{r}_j$ と $\mathbf{v}_j$ をどのように選んでもこの不等式が成り立つことが証明されている。なお、 $m_j$ は正の実数とする。ここで、ベクトル $\mathbf{r}_j$ 、 $\mathbf{v}_j$ をそれぞれ天体の位置・速度を表すベクトルとし、かつ $m_j$ にそれぞれの

天体の質量を代入すると、この不等式は系の全ハミルトニアン  $\mathcal{H}_N$  及び全角運動量  $J_N$  を用いて以下のように書き換えられる。

$$2 \left( \sum_j m_j r_j^2 \right) (\mathcal{H}_N - U(r)) \geq J_N^2 \quad (2)$$

式中の  $U(r)$  はニュートン力学における重力ポテンシャルであり、天体間の距離のみに依存する関数である。式(2) が速度に依存しない、位置  $r$  の関数のみで表されていることに気付いていただろうか。3体系における2つの天体の位置と系の保存量をこの式に代入すると、残りの1体が動ける範囲、すなわち「運動可能領域」がこの不等式によって表されることになる。

図2は、運動可能領域・禁止領域の描画例を表している。上の図のように、内側から順に天体1, 2, 3と番号を付け、1体目, 2体目, 3体目とそれぞれ呼ぶことにする。下の2つの図で水色で塗りつぶされているのが3体目の運動可能領域、黒の斜線で表されているのが運動禁止領域である。黒の点と点線で表されているのは初期の天体と軌道の配置だと考えていただきたい。左の「不安定な場合」という図では、3体目が初期に配置された位置から2体目の近傍まで運動可能領域で覆われている。これは、時間が経てば3体目が2体目に接近することが可能であることを意味している。すなわち、系はヒル安定性の意味で不安定である。一方で、右の「安定な場合」という図では、2体目と3体目が運動禁止領域で完全に分断されており、3体目は2体目に接近することができず、系はヒル安定である。

1982年の Marchal & Bozis の研究 [22] では、パラメータをうまく設定することにより式(2) をさらに変形し、2つの軌道が運動禁止領域で完全に分断されるために必要な保存量の組み合わせを

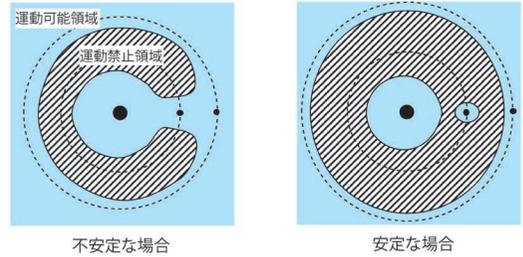
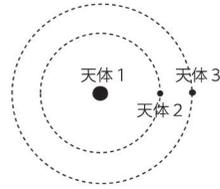


図2 ニュートン力学における、3体目の運動可能領域・禁止領域の描写例。

ヒル安定性の十分条件として見いだした。さらに、1993年の Gladman の研究 [23] では、惑星系を対象としていくつかの近似を用いることで\*4、十分条件をさらに扱いやすい形へと書き換えた。最終的に得られた十分条件は、系がヒル安定であるために必要な初期の軌道間距離  $\Delta$  の最小値という非常にシンプルな形で表されている。

### 3.2 ポストニュートン近似を用いたアプローチ

前節で紹介したニュートン力学における議論を相対論的に拡張するにあたり、筆者らの研究では「ポストニュートン近似」という近似を用いた。相対論では、重力が強ければ強いほど4次元時空の形は“平坦”な形状からずれていく。平坦な時空というのは、ニュートン力学において想定されているような時空である。ポストニュートン近似では、天体の運動速度  $v$  が光速  $c$  より十分に遅く、時空が平坦な状態から少しだけ変形しているような場合を想定し、時空を記述する物理量を  $v/c$  で展開する。こうすることで、天体の運動は相対論的な補正項を含む運動方程式で記述できるようになる。補正項の中で  $(v/c)^2$  を含む項まで考える

\*4 中心天体の周りに2つの非常に軽い惑星が公転しているような状況を想定し、質量比が小さいという条件を用いて質量比の高次の項を無視した。また、系全体の保存量をそれぞれの軌道の保存量の和として近似した。

場合を1次のポストニュートン近似,  $(v/c)^2$ のN乗, すなわち  $(v/c)^{2N}$ を含む項まで考える場合をN次のポストニュートン近似と呼ぶ. 筆者らの研究では, 最も低次である1次のポストニュートン近似を用いた [20]. また, 簡単のため, 中心天体が公転している天体に比べ非常に重く, 質量比が十分に小さいような状況を仮定した\*5.

さて, ニュートン力学でヒル安定性の十分条件を求める際, 鍵となったのはサンドマン不等式(式(1))であった. ニュートン力学ではサンドマン不等式を保存量で書き換えるところからすべてが始まっていたので, 相対論的な議論でもそれに倣うことにする. 1次のポストニュートン近似における全ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{PN}$ と角運動量  $J_{PN}$ を使ってサンドマン不等式を書き換えると, 以下のような不等式が得られる.

$$2\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\left(\mathcal{H}_{PN} - U(r) - m_2 X^{(1-2)}(r_2, v_2) - m_3 X^{(1-3)}(r_3, v_3)\right) \geq J_{PN}^2 \quad (3)$$

ここで,  $X^{(1-2)}(r_2, v_2)$  と  $X^{(1-3)}(r_3, v_3)$  は, それぞれ公転する天体(図2上の天体2・3に対応)の位置と速度に依存する関数である. ニュートン力学の場合, この時点で不等式が位置のみに依存する形で表されていたため, 運動可能領域・禁止領域の描写が可能であったが, 今回は速度依存項が邪魔である.

速度に依存する部分を位置のみに依存する関数で書き換えられないだろうか. 今回は, そのための手段として, ビリアル定理を利用した近似を用いる. ビリアル定理とは, 多体系における運動エネルギーと重力ポテンシャルの平均値の関係を与えるもので, 1次のポストニュートン近似におけるビリアル定理は1963年に Chandrasekhar &

Contopoulos [24]によって与えられている. ビリアル定理によって速度と位置の関係式が与えられるが, これは厳密には平均値として成り立つものであり, いつでも・どの天体にも成り立つものではない. しかし, 今回はこの関係式をあくまで近似として用いることにする.

ビリアル定理を利用した近似を適用すると, サンドマン不等式は最終的に以下の形になる.

$$2\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\left\{\mathcal{H}_{PN} - U(r) + \frac{9}{8} \frac{G^2 m_1^2}{c^2} \left(\frac{m_2}{r_2^2} + \frac{m_3}{r_3^2}\right)\right\} \geq J_{PN}^2 \quad (4)$$

Gは万有引力定数である. この式を用いることで, ニュートン力学の場合と同様に, 1次のポストニュートン近似のもとでの相対論的な運動可能領域・禁止領域を図示できる. 具体的なモデルを設定して実際に図示した結果は, 次章にて数値シミュレーションとの比較とともにお見せする.

ニュートン力学では, この後非常にうまい式変形を用いて, 公転軌道の間ちょうど運動禁止領域が現れ始めるような保存量の組み合わせを求めていた. 本来は, 相対論的な議論においても同じようにして保存量に対する関係式を求め, それをヒル安定性の十分条件として提供すべきではあるが, 式(4)は式(2)に比べ項が増えて煩雑になり, 全く同じ式変形は残念ながらできそうにない\*6. そこで今回は, 十分条件を保存量に対する関係式で表すのではなく, 設定したモデルに対して数値的に「近似的な十分条件」を求めることにした. 手法と結果については, 数値計算結果と照らし合わせて見た方がわかりやすいため, 次章でまとめて説明する.

\*5 この仮定により, 公転する天体同士での重力相互作用における1次のポストニュートン近似の項は, 中心天体と公転する天体間の重力相互作用における項に比べ非常に小さくなったため, 十分条件を求める際にはこれを無視した. なお, 後述する数値シミュレーションにおいてはこの項は無視しておらず, 完全な形の運動方程式を解いている.

## 4. 数値シミュレーションとの比較

前章で得られた相対論的な運動可能領域を記述できる式が本当に有効かどうか確かめるため、数値シミュレーションを用いて3体系の時間発展を調べ、結果を比較する。

### 4.1 モデル・計算手法

筆者らの論文 [20] では中心天体の質量を変えて2種類のモデルについて数値シミュレーションを行った。本稿では紙面の都合上、そのうちの1つ、SMBHモデルと名付けたモデルについての結果のみ紹介する。このモデルでは、中心天体に太陽の $10^6$ 倍の質量をもつ超大質量ブラックホール (SuperMassive Black Hole, 省略してSMBHと呼称) を置き、その周りを太陽と同じ質量をもつ2つの天体が同一平面内で公転している。また、論文では初期の軌道の形を様々に変化させることでさらに複数のモデルを設定したが、ここでは紙面の都合上、初期の軌道の形を円軌道に設定した場合のみを紹介する。

ここからは、どうやって数値シミュレーションでヒル安定性を解析するかを説明していく。基本的な手法は、ニュートン力学においてヒル安定性を数値シミュレーションで解析した先行研究 [17] に従った。まず、ヒル安定性の要となるのは初期の軌道間距離 $\Delta$ であるという Gladman [23] の結果を思い出しておきたい。初期の軌道間距離 $\Delta$ が近すぎた場合、時間が経つにつれ軌道同士が近付きすぎてしまい、ヒル安定性の意味で不安定な状態が実現される。一方で、初期の軌道間距離 $\Delta$ が十分に遠ければ、系は長時間が経過した後も安

定である。そこで、軌道間距離 $\Delta$ を様々に変化させて大量の初期条件を作り、それぞれについて運動方程式を数値的に積分することで軌道の時間発展を計算し、系が不安定になるまでの時間 $T_{\text{stab}}$ を調べた\*7。計算時間の上限は $10^6$ 年とし、それまで系が安定な状態を保っていたならば、その系はヒル安定であると判断した。最終的に、軌道間距離 $\Delta$ と軌道同士の距離が近付きすぎてしまうまでの時間 $T_{\text{stab}}$ との関係を図示し、系がヒル安定になるために必要な最小の軌道間距離 $\Delta$ を探った。

### 4.2 結果

SMBHモデルにおける軌道間距離 $\Delta$ と軌道同士の距離が近付きすぎてしまうまでの時間 $T_{\text{stab}}$ との関係を図3に示す。横軸 $\Delta$ は相互ヒル半径\*8と呼ばれる距離で規格化された軌道間距離である。丸・三角の点はそれぞれニュートン力学・1次のポストニュートン近似における運動方程式を用いた場合の数値シミュレーション結果を表している。縦軸に平行な点線は、Gladmanによる先行研究 [23] で求められたニュートン力学でのヒル安定性の十分条件である。同じく縦軸に平行な2本の実線は、後述する手法で数値的に求められた、近似的な十分条件である。

まず、丸い点と三角の点の振る舞いを比較すると、三角の点の方が広い範囲の $\Delta$ に対して短い $T_{\text{stab}}$ を示していることがわかる。これは、1次のポストニュートン近似を用いて相対論的な効果を考慮して計算した場合の方が、3体系がヒル安定性の意味で不安定になりやすいということの意味している。ニュートン力学では、 $\Delta=3$ 付近、つまり軌道間距離が相互ヒル半径の3倍程度の値を

\*6 もちろん、1次のポストニュートン近似を用いた場合に特化したパラメタライズがうまくできれば、十分条件を式の形で求められる可能性はある。筆者の今後の課題とさせていただきます。

\*7 系の時間発展を計算する中で、中心天体から外側軌道の近点までの距離と内側軌道の遠点までの距離との差がヒル半径よりも小さくなったとき、2つの軌道が近付きすぎた=系が不安定になった、と判断した。

\*8 中心天体の周囲を公転している天体のヒル半径は、天体同士の質量比と軌道長半径を用いて記述される。相互ヒル半径とは、中心天体の周囲を2つの天体が公転している場合に、ヒル半径を記述する質量比と軌道長半径をそれぞれ「2つの天体の合計質量と中心天体の質量比」及び「2つの軌道長半径の平均値」で置き換えたものである。

どるときに  $T_{stab}$  が急激に長くなっており、さらに、先行研究で求められた十分条件に相当する点線がちょうどこのあたりに位置している。このことから、先行研究で求められた十分条件は今回のニュートン力学における数値シミュレーション結果をうまく説明できているといえる。一方で、図から明らかなように、先行研究の十分条件は1次のポストニュートン近似を用いた場合の計算結果を説明できない。したがって、相対論的な十分条件を新しく考えることが必要である。

相対論的な十分条件を求めるために、まずは前章で求めた相対論的な運動可能領域を記述する式(式(4))を用いて、いくつかの初期条件に対す

る3体目の運動可能領域を図示した(図4)。図では、 $\Delta=12.4$ と $\Delta=13.0$ の初期条件について、2体目の周囲の領域を拡大し、式(4)の左辺から右辺を引いた値を色の違いで表している。青い領域が3体目の運動可能領域、黒い領域が運動禁止領域に相当する。 $\Delta=12.4$ の場合、2体目と3体目の間が運動可能領域で覆われている。この特徴は、図2におけるニュートン力学での「不安定な場合」の図に見られるものであり、実際に図3で $\Delta=12.4$ のときのシミュレーション結果を見ると、確かに系は一定の時間経過後に不安定になっている。また、 $\Delta=13.0$ の場合、天体2と3の間が運動禁止領域で分断されている。これはニュートン力学の「安定な場合」で見られた特徴であり、図3で $\Delta=13.0$ の結果を見るとこちらも確かに安定になっている。さらに、 $\Delta=12.4$ と $\Delta=13.0$ の結果を比較すると、 $\Delta$ を大きくしていくにつれて徐々に運動禁止領域が2体目の軌道の内側から外側に広がっていき、最終的に1体目から2体目に向かって引いた直線上の、2体目と3体目の間にある点に運動禁止領域が現れ、系がヒル安定になるものと予想される。

これらの特徴より、「1体目から2体目に向かって伸ばした直線上の、2体目と3体目の間にあるいずれかの点」に初めて運動禁止領域が現れるような最小の $\Delta$ を求めれば、それをヒル安定性の十分条件として扱うことができると考えられる。そこで、筆者らは、 $\Delta$ 及びその他のパラメータを独

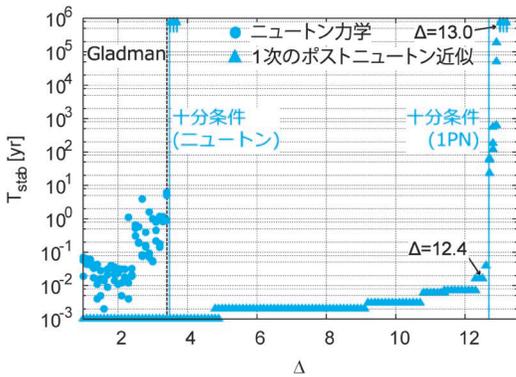


図3 SMBHモデルにおける軌道間距離 $\Delta$ と系が不安定になるまでの時間 $T_{stab}$ との関係。縦軸に平行な点線・実線は、それぞれ先行研究・筆者らの研究において求められたヒル安定性の十分条件。

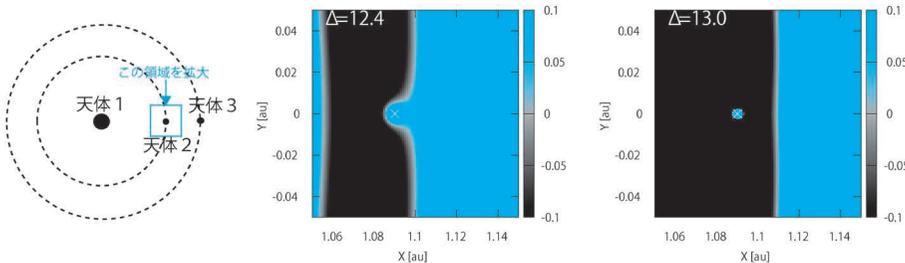


図4 式(4)を用いて、相対論的を考慮した場合の3体目の運動可能領域・禁止領域を描画した。式(4)の左辺から右辺を引いた値を色で示している。青い領域が3体目の運動可能領域、黒い領域が運動禁止領域に相当する。

立に変化させ、上記の条件を満たす $\Delta$ を数値的に探索した。このような手法で得られた近似的な十分条件が、図3で縦軸に平行な実線で示されているものである。図より、ニュートン力学の式(2)を用いた場合の結果(「十分条件(ニュートン)」と表されている実線)は、先行研究の結果をよく再現するものとなっていることがわかる。さらに、1次のポストニュートン近似を用いた場合の結果(「十分条件(1PN)」と表されている実線)は、近似的にはあるものの数値シミュレーション結果をよく説明できていることがわかった。

### 4.3 なぜ不安定になったのか？

数値シミュレーションにより、1次のポストニュートン近似を用いて相対論的効果を考慮した場合、系はニュートン力学の場合よりも不安定になることがわかった。さらに、この効果は運動可能領域・禁止領域を描画することで理論的にも説明できた。ここでは、「なぜ相対論的効果は系を不安定にするようにはたらいいたのか？」ということについて、もう少し直感的に考えてみる。

今回用いたSMBHモデルでは、中心天体から公転する天体にはたらく重力が非常に強く、公転する天体同士の間にはたらく重力はそれに比べてかなり弱い。ゆえに、ニュートン力学的な引力はともかく、1次のポストニュートン近似による補正項に関しては中心天体から公転する天体にはたらく重力においてのみ重要であり、公転する天体同士の間では無視できるような状態であった。このとき、中心天体から公転する天体にはたらく重力における1次のポストニュートン近似項は、近点移動という重要な現象を引き起こす。初めの章でも紹介したが、近点移動とは、楕円軌道の近点の位置が時間経過に伴って徐々に回転移動していく現象である。これにより、2つの楕円軌道の向きが平面内で回転するため、軌道間距離が近付きやすくなってしまったのではないだろうか。

SMBHモデルにおいて、近点の位置、すなわち楕円軌道の向きが平面内で $360^\circ$ 一周するのに

かかる時間を見積もってみると、なんと軌道周期の10倍弱という短い時間であった。一方で、質量が太陽の $10^3$ 倍程度の中間質量ブラックホールを中心にもつモデルでは、近点移動の時間は軌道周期の $10^3$ 倍程度であり、さらに数値シミュレーションではニュートン力学の結果と相対論的な結果の差がほとんど見られなかった。以上より、SMBHモデルでは、1次のポストニュートン近似の項による近点移動の効果により系が不安定になる時間が早まったのだと考えられる。

## 5. まとめと今後の展望

本稿では、1次のポストニュートン近似を用いて、3体系のヒル安定性問題の十分条件を相対論的に拡張した。この研究で対象としたのは中心天体が極端に重い3体系である。この系では、1次のポストニュートン近似項による近点移動の効果により、系がニュートン力学で計算した場合に比べ不安定になることがわかった。

本研究は相対論的な多体系の議論をするうえで、安定性の指標を提供しうるものである。しかし、今回得られた結果がすべての3体系に適用できるわけではなく、まだ完全な指標とはいえない。まず、本研究で対象とした系にはいくつかの条件が課されており、任意の系に応用するためには追加の議論が必要である。例えば、2つの軌道平面が平行でない場合を考えると、十分条件は $\Delta$ という1つのパラメータでは表せず、平面同士が交わる角度にも依存すると予想される。また、本稿で紹介したのは1次のポストニュートン近似を用いた計算であったが、これをさらに高次の項を含む形へと拡張していくことにより、定性的にも異なる結果が得られる可能性がある。例えば、スピンと軌道の相互作用を記述する1.5次の項や、重力波によるエネルギーの引き抜きに相当する2.5次の項などを考慮すると、より面白い結果が得られると期待される。さらに、4体以上の系の安定性の議論を相対論的に拡張することで、

ニュートン力学での未解決問題に新たな評価軸を与えられる可能性もある。

このように、相対論的なヒル安定性問題には、面白い課題がまだまだたくさんある。さらに、ヒル安定性問題以外にも、多体系における特殊解や軌道共鳴現象など、相対論的な議論がまだまだ完全になされていない天体力学の問題が数多く存在する。今こそ、古くから議論されてきた天体力学の謎を掘り返し、相対論を用いて見つめ直すにふさわしい時期かもしれない。重力波天文学が幕を開け、超大質量ブラックホールの影が撮影できた今、もしかしたら明日にでも、相対論的な多体系がまた見つかるかもしれないのだから。

## 謝 辞

本稿は、筆者らが2020年に出版した論文 [20] 及び筆者の博士論文の一部に基づいています。共著者であり指導教官であった山田章一教授には、研究が形になるまでの長い期間、何度も議論していただき、ときに励ましていただきました。深く感謝を申し上げます。もう一人の共著者である中村友祐氏、数値シミュレーションに関して相談にのってくださった大川博督氏にも深く感謝申し上げます。最後に、様々な議論に付き合ってくれた山田研究室及び前田研究室のメンバー、本稿執筆の機会をくださった中村航氏に、この場をお借りして御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Ransom, S. M., et al., 2014, *Nature*, 505, 520
- [2] Luan, J., & Goldreich, P., 2014, *ApJ*, 790, 82
- [3] Rafikov, R. R., 2014, *ApJ*, 794, 76
- [4] Hoang, B.-M., et al., 2019, *ApJL*, 875, L31
- [5] Randall, L., & Xianyu, Z.-Z., 2019, *ApJ*, 878, 75
- [6] Deme, B., et al., 2020, *ApJ*, 901, 125
- [7] Gupta, P., et al., 2020, *Phys. Rev. D*, 101, 104053
- [8] Suzuki, H., et al., 2019, *MNRAS*, 486, L52
- [9] Suzuki, H., et al., 2021, *MNRAS*, 500, 1645
- [10] Hayashi, T., & Suto, Y., 2021, *ApJ*, 907, 48
- [11] Hayashi, T., et al., 2020, *ApJ*, 890, 112
- [12] Hayashi, T., & Suto, Y., 2020, *ApJ*, 897, 29

- [13] Szebehely, V., 1967, *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies* (Academic Press, New York)
- [14] Hénon, M., 1970, *A&A*, 9, 24
- [15] Hénon, M., & Petit, J. M., 1986, *Celestial Mech.* 38, 67
- [16] Wolszczan, A., & Frail, D., 1992, *Nature*, 355, 145
- [17] Chambers, J. E., et al., 1996, *Icarus*, 119, 261
- [18] Petit, A. C., et al., 2020, *A&A*, 641, A176
- [19] Ge, Y. C., & Alexander, D., 1991, *Gen. Relativ. Grav. it.* 23, 335
- [20] Suzuki, H., et al., 2020, *Phys. Rev. D*, 102, 124063
- [21] Ge, Y. C., & Leng, X., 1994, *Planet. Space. Sci.* 42, 231
- [22] Marchal, C., & Bozis, G., 1982, *Celestial Mech.* 26, 311
- [23] Gladman, B., 1993, *Icarus*, 106, 247
- [24] Chandrasekhar, S., & Contopoulos, G., 1963, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 49, 608

## Hill Stability Problem of Relativistic Three-Body Systems

Haruka SUZUKI

*Graduate School of Advanced Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555, Japan*

Abstract: Systems with more than three components are called multi-body systems. Complicated motions shown in the multi-body systems are studied for a long time and many interesting features like special solutions, orbital resonances, and stability problems are explored. Such Newtonian features, however, may show different behaviors in multi-body systems with heavy objects like black holes because their motion in such systems should be described not in Newtonian mechanics but in general relativity. Hence, it is needed to expand the Newtonian discussion of the multi-body systems into the relativistic one. In this article, I focus on a stability problem of multi-body systems called “Hill stability problem”. I introduce previous works which use Newtonian mechanics and discuss the relativistic expansion of the derivation of the sufficient condition for three-body systems.