

ピンホールのつくる太陽像の位置から正確な子午線を求める

竹村 典晃, 渡村 友哉, 市岡 里菜 (中3) 谷元 琴音 (中2) 安慶名 琉, 中村 真慧,
荒川 愛莉, 小松 眞歩, 日下部 咲希 (中1) 【長野県塩尻市立丘中学校】

1. 概要

これまで2年間、ピンホールのつくる太陽像の位置の観測から、均時差の起こる原因について探る活動をしてきた。その中で考えたモデルを検証するためには、より高い精度の観測値と比較する必要がある。そこで、南中高度の観測から得た太陽の天の赤道からの離角を元に、任意の時刻における太陽像の水平盤上の位置を求める式を考えた。式から得られる計算値と5分ごとに観測した太陽像の位置とを比較することで、校舎と子午線のなす角を求めた。ここでは、式の導出と、これまでの観測結果について述べる。

2. 任意の日時の太陽高度と方位を計算で求める

観測地(丘中学校)の地形図上の位置は、東経 137.97° 北緯 36.15° である。これより水平面と赤道のなす角は 53.85° である。これらの値については、以下の式に数値として表記する。また、以下は説明を簡単にするために、日本標準時子午線上にあるとしたときの式であり、均時差については考慮していない。実際の観測値との比較ではそれらを考慮した値を用いた。

(1) 春分・秋分の日について

以下、太陽高度を a (°), 方位角を b (°), 朝6時から
の時間を t (時間) とする。

図1の天球で円 $\overline{H_6H_{18}}$ は春分・秋分の日
の太陽の動きである。太陽が6時から、 A の位置まで移動すると、太陽の位置角 T (°) は地球が1時間で 15° 自転するので $T=15t$ となる。

図2は図1を天の北極から見た図である。弧 $H_{18}DH_6$ (D は図1で、 H_{12} から地平面に下した垂線と地平面の交点) は楕円(の半分)だから、 $H_{12}O : DO = AC : BC, AC = \sin T, DO = \cos(\text{南中高度})$ となり、 $1 : \cos 53.85^\circ = \sin T : BC$ より $BC = \cos 53.85^\circ \cdot \sin T$ となる。

図1において、 $\triangle ABC$ で $AB = \sin a, AC = \sin T$
三平方の定理より $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= \sin^2 T - (\cos 53.85^\circ \cdot \sin T)^2 \\ a &= \sin^{-1}(\sqrt{\sin^2 T - \cos^2 53.85^\circ \cdot \sin^2 T}) \\ a &= \sin^{-1}(\sin T \cdot \sin 53.85^\circ) \text{ となる。} \end{aligned}$$

更に、 $\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ で共通なので、

$$\begin{aligned} \cos T &= \cos a \cdot \cos b \text{ より、} \\ b &= \cos^{-1}(\cos T / \cos a) \text{ となる。} \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \text{太陽高度} &= \sin^{-1}(\sin T \cdot \sin 53.85^\circ) \\ \text{方位角} &= \cos^{-1}(\cos T / \cos(\text{太陽高度})) \end{aligned}$$

として求められる。

(2) 春分・秋分以外の日について

太陽の経路は図3のように半径が $\cos \theta$ (θ は天の赤道からの離角) の円になる。図1から点 A の x, y, z 座標を求め、 y 軸方向に $\sin \theta \cdot \cos 36.15^\circ$, z 軸方向に $\sin \theta \sin 36.15^\circ$ だけ平行移動すると、図3における点 A' の座標が決まる。その座標から太陽高度と方位角を求める。以下に計算式を示す。

天球の半径は $\cos \theta$ なので、点 A の座標は図4より、

$$X_A = CO = \cos \theta \cdot \cos a' \cdot \cos b'$$

(a', b' は同時刻の春分・秋分の日
の太陽高度, 方位角)

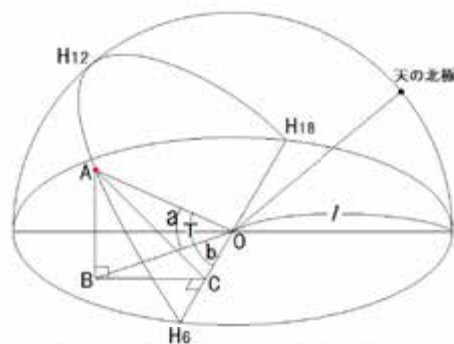


図1 春分・秋分の太陽の動き

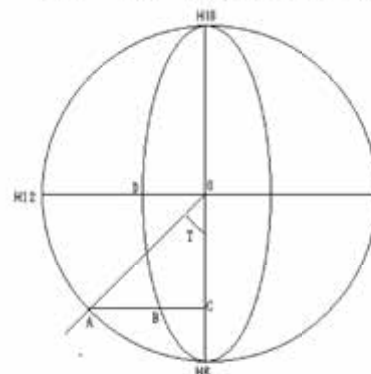


図2 天の北極方向から見たところ

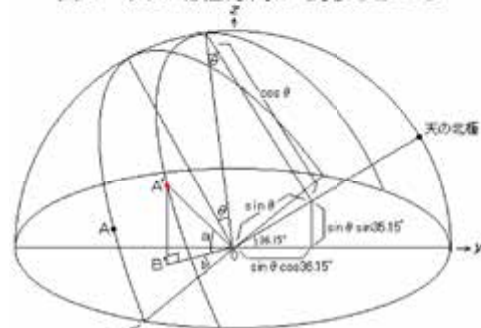


図3 春・秋分以外の場合

また、 $y_A = BC$ より $y_A = \cos \theta \cdot \cos a' \cdot \sin b'$
 $z_A = AB = \cos \theta \cdot \sin a'$

点 A' は点 A を平行移動したのだから、

$$x_{A'} = x_A$$

$$y_{A'} = y_A + \sin \theta \cdot \cos 36.15^\circ$$

$$z_{A'} = z_A + \sin \theta \cdot \sin 36.15^\circ$$

三平方の定理より、 $B'O = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2}$
 $\cos b = CO / B'O = x_{A'} / \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2}$ より、
 $b = \cos^{-1}(x_{A'} / \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2})$

さらに、 $\tan a = A'B' / B'O$ より、 $a = \tan^{-1}(z_{A'} / \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2})$
 以上より、

$$x_{A'} = \cos \theta \cdot \cos a' \cdot \cos b'$$

$$y_{A'} = \cos \theta \cdot \cos a' \cdot \sin b' + \sin \theta \cdot \cos 36.15^\circ$$

$$z_{A'} = \cos \theta \cdot \sin a' + \sin \theta \cdot \cos 36.15^\circ$$

$$\text{太陽高度} = \tan^{-1}(z_{A'} / \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2})$$

$$\text{方位角} = \cos^{-1}(x_{A'} / \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2})$$

(3) 太陽高度と方位角から記録面にできる太陽像の x,y 座標を求める

図5は記録面にできる太陽像(赤点)を示したもので、方位角 b は図のようになる。原点から太陽像までの距離 r は、三平方の定理より $r = \sqrt{x^2 + y^2} \dots [1]$ また、 $y = |x| \cdot \tan b$ となる。…[2]

図6は観測装置を横から見た図である。ノーモンの高さを h とすると、 $r = h / \tan a$ となる。

[1], [2]より、 $h / \tan a = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \tan^2 b}$
 $x^2 = (h^2 / \tan^2 a) / (1 + \tan^2 a) = h^2 / (\tan^2 a + \tan^2 a + \tan^2 b)$
 $x = \pm \sqrt{h^2 / (\tan^2 a + \tan^2 a + \tan^2 b)}$

ここで、 $b < 90^\circ$ のとき $x < 0$ 、 $b > 90^\circ$ のとき $x > 0$ なので、方位角が 90° (北から 180°) 以下なら負の解、 90° 以上なら正の解となる。
 以上より、太陽像の座標は、次の式で求めることができる。

$$x = \pm \sqrt{h^2 / (\tan^2 a + \tan^2 a + \tan^2 b)}, \quad y = |x| \cdot \tan b \dots [3]$$

3. 観測との比較から子午線を求める

図6のような、60cmの高さのピンホールを持つ観測装置を作製した。装置を理科室前ベランダの壁の定位置に密着させ、5分ごとあるいは2.5分ごとに水平面上にできた太陽像の輪郭をなぞるようにして記録した。長方形の水平盤の校舎に沿った方向を x、それと垂直な方向を y として、太陽像の中心位置の座標を読み取った。比較は、上記の計算式に時刻として日本標準時子午線に対する補正を加えた値を代入し、観測値と式[3]で求められる値の差の2乗の合計が最小となるような均時差と校舎と垂直な方向に対する子午線の傾きの組み合わせを求めた(図7)。現在までのところ、表1に示すような結果を得ており、これまでにコンパスを使った作図で求めた値とよく合う結果となっている。

4. まとめと今後の課題

冬至には太陽像はピンホールの真下から約120cm離れた位置にでき、南中時刻付近で10秒間に1mmほど移動する。求めた子午線に0.1°の誤差があると、南中時刻として約20秒の誤差となって現れることになる。これからより多くの観測を行い、子午線を精度よく求めていきたい。なお、現在は天の赤道からの離角を一日の間で一定として扱っているが、一日の中の変化も考慮した式を作り比較していきたい。

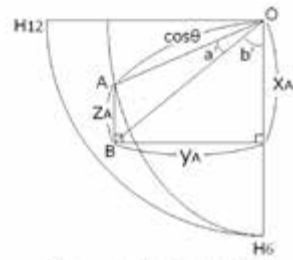


図4 図1の拡大図

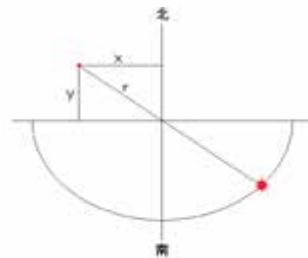


図5 太陽と太陽像

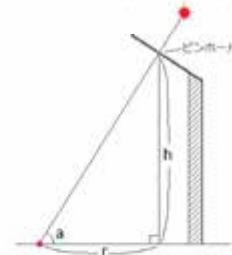


図6 装置と太陽像の位置

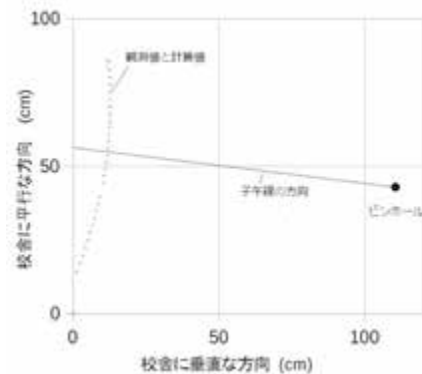


図7 2016年1月4日の観測と解析

表1 観測結果

観測日	子午線の方向(°)	観測の個数
2015年 5月30日	-6.91	91
2015年 6月20日	-6.33	46
2015年 7月11日	-7.15	86
2015年 7月25日	-6.52	92
2015年 9月23日	-6.87	68
2015年 12月30日	-6.86	21
2016年 1月4日	-6.91	28
2015年 1月16日	-6.96	28