K03b　ケプラー方程式の高速解法

福島登志夫（国立天文台）

ケプラー方程式の拡張形 $f(D) \equiv D - e_X \sin D + e_Y \cos D - L = 0$ を解くことを考える。ただし $0 \leq e_X^2 + e_Y^2 \leq 1$, $0 \leq L - e_Y < 2\pi$ とする。このとき $f(0) \leq 0$, $f(2\pi) > 0$ で f は単調増加なので、解 D は $[0, 2\pi)$ にただ一つ存在する。ここに $D \equiv E + \varpi$、E は離心近点角、ϖ は近点経度、$L \equiv M + \varpi$ は平均軌道経度、$e_X \equiv e \cos \varpi$ 及び $e_Y \equiv e \sin \varpi$ は離心ベクトルの軌道面座標、e は離心率であり、$e_Y = 0$ のときが通常のケプラー方程式である。ケプラー方程式の拡張形は、天体の座標・速度と（e や軌道傾斜角 I が小さい軌道でも扱える）軌道要素との間の変換に必須であり、最近流行の混合変数シンプレクティック (MVS) 積分法 (Kinoshita *et al.* 1991,Wisdom & Holman 1991) や、高精度計算が可能な軌道要素に対する拡張 Encke 法 (Fukuhsima 1996) などに頻繁に現れるため、その高速な解法が求められている。この方程式は非線型であるため、数値的に反復解法で近似解を求めるしかないが、解区間中で $f''(D)$ が定符号でないため、Newton-Raphson 法に対して必ず収束する出発値を与えることが難しい。Halley 法では、$D = L$ から出発すれば必ず収束することが実験的に示されている。いずれにしろ、この種の反復解法においては、三角関数のライブラリの呼び出しに計算時間の大部分が費やされている。高速化するためには、この呼び出しを減らすことが肝要である。解を安定に求めることと、ライブラリの呼び出しを完全になくすことを念頭において、上記方程式の解を、(1) あらかじめ用意した三角関数の表を用いる 2 分法と、(2) 三角関数の計算を Taylor 級数で置き換えた Newton-Raphson 法、との組み合わせで解くという方法を開発した。この解法は安定であり、かつ Halley 法やその他の方法に比べ半分以下の CPU 時間で解を求めることができる。また $e_Y = 0$ となる通常のケプラー方程式においても、同様に既存の方法に比べて 2 倍以上高速である。この解法に要する計算時間は、任意の D に対し $f(D)$ を 2 回評価する時間よりも短い。このことから、三角関数の計算がハードウェアで提供されない限り、本方法より大幅に高速な解法は現れないと予想される。