K03a　ケプラー方程式の高速解法 II：双曲線軌道

福島登志夫（国立天文台）

ケプラー方程式の解法は天体の座標・速度と軌道要素との間の変換に必須であり、最近流行の混合変数シンプレクティック (MVS) 積分法 (Kinoshita *et al.* 1991,Wisdom & Holman 1991) や、高精度計算が可能な軌道要素に対する拡張 Encke 法 (Fukuhsima 1996) などに頻繁に現れるため、その高速な解法が求められている。楕円軌道の場合のケプラー方程式の拡張形に対する高速解法は昨年秋の年会で報告した (Fukushima, T. 1996, AJ, 112, 2858) 。今回は双曲線軌道について報告する (Fukushima, T. 1997, AJ, 113, 1920)。方程式 $f(D) \equiv e_X \sinh D + e_Y(\cosh D - 1) - D - L = 0$ を解くことを考える。ただし $1 \leq e_X < \infty$, $|e_Y| < e_X$, $0 \leq L < \infty$ とする。このとき $f(0) \leq 0$, $f(\infty) > 0$ で f は単調増加なので、解 D は $[0, \infty)$ にただ一つ存在する。ここに $D \equiv F - F_0$、$L \equiv M_H - M_{H0}$、F および M_H は（双曲線軌道のときの）離心近点角および平均近点角、e は離心率、$e_X \equiv e \cosh F_0$ 及び $e_Y \equiv e \sinh F_0$ は離心ベクトルの軌道面座標であり、添え字 0 は元期のときの値を表す。$e_Y = 0$ のときが通常の双曲線軌道に対するケプラー方程式である。f が非線型であるため、数値的に反復解法で近似解を求めるしかないが、楕円軌道の場合と同様に安定な出発値を与えることが難しい。たとえば、唯一知られている Danby(1988) の出発値公式は不安定であることが容易に示される。さらに難しいことに、解区間が半無限であるため、楕円軌道のときに用いた二分法を直接適用することができない。解を安定に求めることと、双曲線関数ライブラリの呼び出しを完全になくすことを念頭において、上記方程式の解を、(1) 解が非常に大きいときは、方程式の原点移動に対する不変性を用いて原点移動を繰り返すことにより、その大きさが小さい新変数へと変数変換し、(2) あらかじめ用意した双曲線関数の表を用いる多段階 2 分法と、(3) 双曲線関数の計算を Taylor 級数で置き換えた Newton 法、との組み合わせで解くという方法を開発した。この解法は、全ての場合について安定であり、かつ楕円軌道のときと遜色ない CPU 時間で解を求めることができる。この解法に要する計算時間は、任意の D に対し $f(D)$ を 2 回評価する時間よりも短い。このことから、双曲線関数の計算がハードウェアで提供されない限り、本方法より大幅に高速な解法は現れないと予想される。