K04a 超陰 (super-implicit) 線形多段法

福島登志夫 (国立天文台天文情報公開センター)

1998 年秋の年会では、対称線形多段法の一般理論 (Fukushima 1998a) と数値実験結果 (Fukushima 1998b) を報告した。そのとき述べたように、高次の対称多段法公式では、不要根（公式を特徴付ける特性多項式の根のうち単位円上にある非ゼロ位相の根のこと）の存在のために、問題に内在される周期との非線型共鳴現象により数値不安定が起きる可能性がある。これを克服する方法として、超陰 (super-implicit) 公式を採用することが考えられる。超陰公式とは、時間軸上で 1 ステップ進むときに未来の情報を必要とする公式の総称である。例をあげると、アダムス型の 4 点公式の場合、陽公式 (現在の値を求めるのに過去の情報のみ用いる）と陰公式（現在の値を求めるのに過去と現在の情報を必要とする）は夫々

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right), \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

と表現される。一方、超陰公式（現在の値を求めるのに過去、現在、未来の情報を必要とする）では、たとえば

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(-f_{n+2} + 13f_{n+1} + 13f_n - f_{n-1}\right), \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(f_{n+3} - 5f_{n+2} + 19f_{n+1} + 9f_n\right)$$

などとなる。右辺の f の添え字の微妙な違いに注意されたい。左側の公式が対称超陰公式である。この場合、特性多項式は z-1 となって、その根が主要根 (z=1) のみの単根であるため、高次（4 次公式）であるにもかかわらず、同じ次数の対称陽公式や対称陰公式における数値不安定が起きない。もちろん、超陰公式は陰公式の一種なので陽には解けず、初期解を想定して逐次近似により解くことになる。初期解の推定が必要なのと逐次近似が収束することが必要なことから、一般の問題に適用できるわけにはいかないが、これは以前発表したピカール積分法 (Fukushima 1996, 1997) の範疇に入るため、逆に並列化・ベクトル化により大幅な高速化が期待できる。講演では、一般理論を述べるとともに数値実験の結果についても紹介する予定である。