K05a 一般化された自由度２の同次 Hamilton 系の積分可能性の必要条件

中川克也 (京大理)、吉田春夫 (国立天文台)

具体的に与えられた Hamilton 系が積分可能か否か、つまり解が解析的に求められるか否か、を判定することは力学の研究における基本問題のひとつであるが、現在のところその最終的な判定条件は知られていない。最近、同次式ポテンシャル系 $H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2)$ が積分可能となるための強力な必要条件が得られた (Morales-Ruiz & Ramis 1998; Yoshida 1998)。これは
(a) 直線解の周りの変分方程式が独立変数の変換によって Gauss の超幾何微分方程式に変換され、
(b) もとの系が積分可能ならば得られた Gauss の超幾何微分方程式が初等的に解ける、という主張に
(c) Gauss の超幾何微分方程式が初等的に解けるための必要十分条件を示した木村の定理 (1969)
を適用することによって求められたものである。

本研究では、この同次式ポテンシャル系の場合を含み、より一般的な形に拡張した Hamilton 系 $H = T(p_1, p_2) + V(q_1, q_2)$ の積分可能性について考察した。ただし $T(p_1, p_2)$ と $V(q_1, q_2)$ は共に整数次数の同次式である。そしてこの場合にも上記 (a)(b) が成り立つことを証明し、木村の定理を適用することによって系が積分可能となるための必要条件を求め、それらを列挙したリストを得た。

得られた必要条件の適用例として Hamilton 系 $H = (1/m)(p_1^2 + p_2^2)^{m/2} + V(q_1, q_2)$ の積分可能性について調べた。例えば $V(q_1, q_2) = (q_1^2 + q_2^2)^{k/2}$ の場合、任意の整数 m, k で系は積分可能となり極座標で変数分離可能である。一方 $V(q_1, q_2) = (1/r)[(r + q_2)^{k+1} + (-1)^k (r - q_2)^{k+1}]$ の場合、系が積分可能となりうるのは $m = 2$ のときに限ることが示される。実際、$m = 2$ のときは任意の整数 k に対して系は放物線座標で変数分離可能である。

本研究成果は平成 10 年度国立天文台共同研究により得られたものである。