

K01a シンプレクティック積分法における丸め誤差の軽減

福島登志夫 (国立天文台 天文情報公開センター)

太陽系の安定性など、力学系の長期時間発展を有効に追跡するには、時間の経過につれて、軌道積分誤差が成長しにくい数値積分を実行する必要がある。さて、誤差には大別して打切り誤差と丸め誤差の2種類がある。普通の数値積分法だと、軌道積分の打切り誤差は時間の2乗に比例するが、特殊な方法を用いると誤差の成長を時間の1乗で抑えられる ($\Delta r \propto T$)。このような方法としては、シンプレクティック積分法と対称線形多段法がある。前者については Yoshida (1995, CMDA) の解説を、また後者については Quinlan and Tremaine (1990, AJ) および Fukushima (1999, Proc. IAU Coll.173) を参照されたい。一方、軌道積分の丸め誤差は、Brouwer (1937, AJ) の古典的な研究によれば、時間の1.5乗で増加すると予想されたが、実際の計算では時間の2乗に比例することが、あちこちで報告されている。このことからみても、長期時間発展を正確に求める目的には、丸め誤差を軽減させる工夫が非常に重要である。これまで軌道積分における丸め誤差を軽減させる工夫は (対称線形多段法を含む) 線形多段法については Quinlan (1994, CMDA) などの多くの研究があり、外挿法については Fukushima (1997, AJ) の手法がある。今回、シンプレクティック積分法の基礎となる Leapfrog 則^a について、簡単な工夫を行うことにより、丸め誤差を約2桁小さくすることに成功した。この結果は、Leapfrog 則の組み合わせから構成される高次のシンプレクティック積分法にも同様に適用できるが、残念ながら混合変数シンプレクティック法 (MVS) には、そのままでは適用できない。工夫の要点は、積分する天体の位置・速度、それぞれについて2倍のメモリー領域を用意し、位置・速度それぞれの増分をもとの値に加えるときにあふれる情報をなるべく拾い集めて、次のステップでの加算に反映させるという単純なものである。工夫の代償は、積分する天体の位置・速度のメモリー領域が2倍必要であることと、ほんのわずかな計算時間の増加である。

^a これは、2次のシンプレクティック陽公式であるとともに、2次の Stormer 公式すなわち2次の対称線形多段法陽公式でもある。