K03a　シンプレクティック数値解法による超可積分性の非保存

○吉田 春夫 (国立天文台)

ハミルトン系に対する専用数値解法であるシンプレクティック解法は，常にエネルギー（ハミルトニアン）を良く保存する．これは「変形されたハミルトニアン」と呼ばれる，もとのハミルトニアンの摂動で与えられる形式的なベキ級数が，シンプレクティック解法の厳密な保存量となっていることがその基礎にある．さて元の系がハミルトニアン以外の第一積分を持つとき，この第一積分もまたシンプレクティック解法によって良く保存されることが当然期待される．実際多くの例題でハミルトニアン以外の第一積分の良い保存が観測されてはいるが，残念ながら以下に示すように全ての第一積分が良く保存されるわけではない．

自由度２の積分可能なハミルトン系の中に超可積分系と呼ばれるサブクラスがある．この超可積分系においては自由度の数以上の独立な第一積分（３番目の第一積分）が存在し，その結果として全ての有界な軌道は周期軌道となる．超可積分系の例には (1) ケプラー問題，(2) 振動数比が整数の調和振動子，(3) カロゲロ系などがある．これらの系に対して１次のシンプレクティック解法を適用すると，系の超可積分性に寄与する３番目の第一積分は良く保存されず，結果として運動の周期性も失われる．さらにこの第一積分に対して，変形されたハミルトニアンの第一積分として定義される「変形された第一積分」が存在しないことが証明される．この保存されない第一積分はケプラー問題 $H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2) - 1/r$ ではルンゲ・レンツベクトル $F = p_2(q_1 p_2 - q_2 p_1) - q_1/r$，振動数比が 1:2 の調和振動子 $H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2) + (1/2)(q_1^2 + (1/4)q_2^2)$ では $F = p_1(4p_2^2 - q_2^2) + 4q_1 p_2 q_2$，そしてカロゲロ系 $H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2) + (1/2)(q_1^2 + q_2^2 + 1/(q_1 - q_2)^2)$ では $F = (q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + (q_1^2 + q_2^2)/(q_1 - q_2)^2$ である．

本研究成果の一部はすでに H. Yoshida, ”Non-existence of the modified first integral by symplectic integration methods”, Physics Letters A, 282, 276-283 (2001) として出版されている．