K03b ケプラー運動に対する線形多段法の安定領域 II

○山本 一登 (総研大)、福島 登志夫 (国立天文台)

線形多段法の最大の利点は、計算時間が次数によらないことである。しかし、高次の公式になるほど安定な刻み幅の最大値 $h_{\rm MAX}$ が小さくなる。理論的に $h_{\rm MAX}$ が求められるのは調和振動子の場合であり、カウエル型では

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2(\,\beta_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1} + \cdots) = -H^2(\,\beta_n x_n + \beta_{n-1} x_{n-1} + \cdots)$$

これを

$$\rho(z) = -H^2 \sigma(z) \quad , \quad \rho(z) = z^{n+1} - 2z^n + z^{n-1} \quad , \quad \sigma(z) = (\,\beta_n z^n + \cdots)$$

と考える。従来は H の値を少しずつ変えていき、多項式の根が複素平面の単位円からはみ出すときの値を安定な刻み幅の最大値としていた。今回、我々は多項式の根を求めずに簡単に最大値を得る手法を考えた。

$$h_{\rm MAX} = \sqrt{\underset{0<\theta\le\pi\,,\,{\rm Im}[F(\theta)]=0}{\rm Min}\ {\rm Re}\Big[F(\theta)\Big]} \quad , \quad F(\theta) = -\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \quad , \quad e^{i\theta} = z$$

最大値 $h_{\rm MAX}$ は刻み幅 H が実数でなければならないことから $F(\theta)$ の虚数部分 ${\rm Im}[F(\theta)]$ が 0 のときの $F(\theta)$ の実数部分 ${\rm Re}[F(\theta)]$ の最小値になる。この手法をアダムス型に適用するには調和振動子を一階の微分方程式系 $\dot{y} = -i\,y$ と捉えれば同様に扱うことができる。今回の方法は任意の多段法で扱えるものである。