L07a 差分演算子の応用：差分軌道の運動方程式

○福島登志夫 (国立天文台)

いわゆるダスト・トレイル理論（例えば Asher and Emel'yanenko, 2002, MNRAS などを参照）による流星群の出現予測や、2002 年に打ち上げられた地球重力場を精密測定する双子の観測衛星 GRACE （詳細は http://www.csr.utexas.edu/grace/にて）など編隊飛行する人工衛星群の軌道解析などでは、良く似た天体軌道の差を精密に計算する必要が生じる。もちろん、十分な計算パワーと十分に長い桁数で計算できる環境があれば、初期条件が少しずつ異なる複数の類似軌道を超高精度で計算した後に、その差を求めれば事は足りるのだが、これは効率が悪い。２次以上が無視できるほど微小な差であれば、元の運動方程式に偏微分を施して得られる変分方程式を積分することによって問題は解決するが、衛星間の相対位置ベクトルなど有限の差分量に対して運動方程式を機械的に導出するには、$\Delta x \equiv x - x_0$ で定義される差分演算子が有効である。差分演算子に関する公式は

$$\Delta(xy) = x(\Delta y) + y_0(\Delta x), \ \ \Delta\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x_0(\Delta y) - y_0(\Delta x)}{x x_0}, \ \ \Delta(\sin x) = 2\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

などと導出可能である。簡単な例として、直交座標における２体問題の運動方程式に差分演算子を施した場合、これらの諸公式を使えば、良く知られたエンケの運動方程式の現代版が簡単に得られる。少し難しい例として、直交座標における摂動２体問題においても、第３体の摂動や第１体の高次重力場の効果など、さまざまな摂動に対して同様に差分演算子を機械的に施せば、差分位置ベクトルに対する運動方程式が得られる。講演では、そのほか Gauss の軌道要素の変化方程式や KS 正則化後の運動方程式などに対応する差分方程式の導出例を報告する。