L08a 動く軌道面上でのレビ・チビタ変換による摂動2体問題の正則化

○福島登志夫 (国立天文台)

正則化とは、変数変換により独立変数を実時間から仮想時間に変更するとともに、従属変数についても実時間やケプラー・エネルギーを含めるなど、その数を増やすことにより、近接遭遇時の数値的困難を避ける手法である。3次元運動の場合 Kustaanheimo-Stiefel (KS) 変換、Bürdet-Ferrandiz (BF) 変換、Bürdet-Heggie (BH) 変換の3種類が知られている。残念ながら、従属変数の数は変換前の6に比べていずれも多く、KS変換とBF変換で10、BH変換では13に上る。この状況を改善すべく、「運動の途中で角運動量が0にならない」という条件付きではあるが、正則化後の従属変数の数を8にまで減らすことに成功したので報告する。新しい従属変数は(1)動く軌道面に準拠する座標系 $(\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C)$ を規定する軌道角運動量ベクトル $\vec{L}$ の静止座標系での2成分 (L_I, L_J)、(2)動く軌道面上のレビ・チビタ位置変数 (u_P, u_Q) および速度変数 (w_P, w_Q)、(3)ケプラー・エネルギー K、および(4)実時間 t の8個である。新変数を使うと実空間での位置速度ベクトルの動座標系成分は $(x_A, x_B) = \left(u_P^2 - u_Q^2, 2u_P u_Q\right)$, $(v_A, v_B) = \left(2\left(u_P w_P - u_Q w_Q\right)/r, 2\left(u_P w_Q + u_Q w_P\right)/r\right)$ と表現される。ただし $r = u_P^2 + u_Q^2$ である。新しい運動方程式の主要部分は、仮想時間 s に対して、以下のような2次元の摂動調和振動子型の運動方程式となる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\begin{pmatrix} u_P \\ u_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_P \\ w_Q \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} u_Q \\ -u_P \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\begin{pmatrix} w_P \\ w_Q \end{pmatrix} = \frac{K}{2}\begin{pmatrix} u_P \\ u_Q \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} w_Q \\ -w_P \end{pmatrix} + \frac{r}{2}\begin{pmatrix} u_P a_A + u_Q a_B \\ u_P a_B - u_Q a_A \end{pmatrix}$$

ただし γ は L_I と L_J の時間変化から計算される動座標系の回転角速度であり、a_A などは摂動加速度ベクトルの動座標系成分である。この運動方程式は $\vec{L}$ が有限である限り正則で、従って近接遭遇時に数値的困難を起こさない。