L15a 自転運動の正準要素

○福島登志夫 (国立天文台)

ハミルトンの正準方程式は解析力学の王道である。アンドワイエ正準変数 $(L,G,H;\ell,g,h)$(Andoyer 1912) は、三軸不等の剛体の場合に自転要素でないので、一般の剛体の自転運動に関する正準要素が必要となる。しかし、Serret(1866) の正準要素は無摂動ハミルトニアンを 0 とするため、無摂動解に時間が陽に現れてしまい、摂動展開には不向きである。一方、Sadov(1970) や Kinoshita(1972) の正準要素は、逆変換が陽的に解けないため使いにくい。この事態を打開するために、アンドワイエ正準変数を正準変換することにより、新しい正準要素 $(S,Z,H;s,z,h)$ の導出に成功した (Fukushima, 2008, AJ, 136, 1728)。新変数のうち H と h はアンドワイエ正準変数と同じで、$Z\equiv G$ であり、S は最小主慣性モーメント A と運動エネルギー T から $S\equiv\sqrt{2AT}$ と定義される。残りは正準変換の母関数

$$W(S,Z;\ell,g)=Zg+\int_{\pi/2}^{\ell}\left[\sqrt{\frac{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)Z^2-aS^2}{(a-c)\sin^2\theta+(b-c)\cos^2\theta}}\right]d\theta,\ \ \text{ただし}\ \ a\equiv\frac{1}{A},\ \ b\equiv\frac{1}{B},\ \ c\equiv\frac{1}{C},$$

から偏微分によって $s\equiv(\partial W/\partial S)_{Z,\ell,g}$ および $z\equiv(\partial W/\partial Z)_{S,\ell,g}$ と計算される。詳細は上記論文に譲るが s の表現には第 1 種不完全楕円積分が、また z の表現には、さらに第 3 種不完全楕円積分が現れる。この正準要素により、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は、U をポテンシャル・エネルギーとして $\mathcal{H}=(aS^2)/2+U$ と非常に簡単に表現される。無摂動時には $U=0$ より、正準運動方程式は容易に解ける。実際、S,Z,H,z,h は積分定数となり s は時間の線形関数となる。つまり、新正準変数は自転要素である。また、新変数とアンドワイエ変数の変換は順逆いずれも陽的であり、楕円関数および不完全楕円積分で表される。これは Sadov や Kinoshita の正準要素に比べて大きな利点である。