L07a　自由回転運動の初期値問題の実用解

○福島登志夫 (国立天文台)

ケプラー運動が軌道運動の基本であるように、三軸不等剛体の自由回転運動は自転運動の基本である。この運動では厳密解が解析的に知られているため、本年春に発表した正準要素 (Fukushima, 2008, Astron. J., 136, 1728) などが与えられれば、解を時間の関数として陽的に表現することが出来る。しかし、運動の初期状態から任意時間後の運動状態を求める初期値問題においては、要素を用いた解表現は非実用的である。ケプラー運動の場合の実用解は、ラグランジュ係数（いわゆる f および g 関数）を用いて $\vec{r}(t) = f(t)\vec{r}_0 + g(t)\vec{v}_0$ 及び $\vec{v}(t) = f'(t)\vec{r}_0 + g'(t)\vec{v}_0$ と表される。今回、自由回転運動について同種の実用解を求めた (Fukushima, 2009, Astron. J., 138,210) ので報告する。自転運動の状態変数として自転角運動量ベクトル $\vec{L}$ および方向余弦行列 $\mathbf{E} \equiv (\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C)$ を採用すると、実用解は $\vec{L}(t) = \vec{L}_0$ 及び $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0\mathbf{F}(t)$ と表現される。遷移行列 $\mathbf{F}(t)$ の表現は、初期状態 $\vec{L}_0$ 及び $\mathbf{E}_0$ 並びに剛体の主慣性能率の逆数 (a, b, c) に応じて幾通りかに分かれるが、いずれも $\mathbf{F}(t) = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(t_0)\mathbf{R}(t-t_0)\mathbf{W}(t)$ とサンドイッチ形式で表現される。ここに $\mathbf{W}(t)$ は $\vec{L}$ に関する極運動行列であり $\mathbf{R}$ は $\vec{L}$ まわりの回転行列である。遷移行列の計算では、時間の線形関数 u を楕円引数、自転運動エネルギー T の線形関数 m を楕円パラメータとするヤコビの正弦振幅関数 $\mathrm{sn}(u|m)$、余弦振幅関数 $\mathrm{cn}(u|m)$ 及びデルタ振幅関数 $\mathrm{dn}(u|m)$、並びに同じく T の線形関数（もしくは時間の定数）n を楕円特性数とするパイ振幅関数 $\mathrm{pn}(n, u|m) \equiv \Pi(n, \mathrm{am}(u|m)|m)$ が多用される。今の場合、$\mathrm{sn}(u_0|m), \mathrm{cn}(u_0|m), \mathrm{dn}(u_0|m)$ 及び $u-u_0$ が与えられたときに、u_0 の計算を経由せずに $\mathrm{sn}(u|m), \mathrm{cn}(u|m), \mathrm{dn}(u|m)$ 及び $\mathrm{pn}(n, u|m) - \mathrm{pn}(n, u_0|m)$ を求めることが要求されるが、これらの計算は上記の楕円関数の加法定理を用いることにより高速化される (Fukushima, 2008, Celest. Mech. Dyn. Astron., DOI 10.1007/s10569-008-9177-y)。ここで求めた初期値問題の実用解は、自転運動のシンプレクティック積分法において威力を発揮するであろう。