

L10a 一様なリングあるいはディスクの加速度場

福島登志夫 (国立天文台)

土星周辺の探査機の軌道計算などでリングもしくはディスクの重力加速度場が必要となるが、球面調和関数による多重極展開は収束が悪いため定義に立ち戻って計算しなければならない。線密度 λ 、半径 a の一様リングのポテンシャルは第一種完全楕円積分 $K(m) \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta / \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}$ を用いて $U(r, z) = 4G\lambda a K(m)/p$ と表わされる (Kellogg 1929)。ただし r はリングの対象軸からの距離、 z はリングを含む面からの距離、 $p = \sqrt{(r+a)^2 + z^2}$ 、 $m = 4ar/p^2$ である。実際の計算には加速度場が必要であるが具体的な表現が文献には見当たらないので導出すると $(-A_r r, -A_z z)$ となる。まず $A_z = 4G\lambda a E(m)/(pq^2)$ で、 $E(m) \equiv \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}) d\theta$ は第二種完全楕円積分、 $q = \sqrt{(r-a)^2 + z^2}$ である。次に A_r は $K(m)$ と $E(m)$ の線形結合で書けるが、その表現は $r \sim 0$ で激しい桁落ちに直面する。これを避けるために補助的な完全楕円積分 $B(m) \equiv \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta / \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}) d\theta$ および $S(m) \equiv (-1/m) \int_0^{\pi/2} (\cos 2\theta / \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}) d\theta$ を導入すると $A_r = (8G\lambda a/p^3) [\{(r^2 + z^2 - a^2)B(m)/q^2\} + \{2a(r+a)S(m)/p^2\}]$ となる。この表現は桁落ちを生じない。同様のことは一様ディスクの加速度場にも言える。ポテンシャルの表現は Lass & Blitzler (1983) に、また加速度場の表現は Krogh et al. (1982) に既に与えられているが、後者の r 方向の加速度表現は桁落ちが激しく使い物にならない。これも上記の補助的積分を使えば $A_r = 16G\sigma a^2 S(m)/p^3$ と精度良く計算できる。ただし σ はディスクの面密度である。実際の軌道計算には $B(m)$ および $S(m)$ の数値計算が必要であるが、前者の高速計算法は Fukushima (2010a, Math. Comp., accepted) に、また後者の高速計算法は Fukushima (2010b, Celest. Mech. Dyn. Astron., submitted) に詳しい。なお $K(m)$ および $E(m)$ の高速計算法については Fukushima (2009, Celest. Mech. Dyn. Astron., 105, 305) を参照されたい。